

N° d'enregistrement  
au C. N. R. S.

A. O. 5285

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

à la Faculté des Sciences de  
PARIS

par

Monsieur TERJANIAN Guy

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences Mathématiques

Sujet de la Thèse : DIMENSION ARITHMETIQUE D'UN CORPS

soutenue le 9 juillet 1970 devant la Commission d'Examen

MM. C. CHEVALLEY ... Président

M. LAZARD ..... Examineur

J. P. SERRE ..... Examineur



N° d'enregistrement  
au C. N. R. S.  
A. O. 5285

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

à la Faculté des Sciences de  
PARIS

par

Monsieur TERJANIAN Guy

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences Mathématiques

Sujet de la Thèse : DIMENSION ARITHMETIQUE D'UN CORPS

soutenue le 9 juillet 1970 devant la Commission d'Examen

MM. C. CHEVALLEY ... Président

M. LAZARD ..... Examineur

J. P. SERRE ..... Examineur



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41549002\\_0049](https://archive.org/details/IA41549002_0049)

## Dimension arithmétique d'un corps

GUY TERJANIAN

*U.E.R. de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 31 Toulouse, France*

*Communicated by A. Fröhlich*

Received May 5, 1971

### INTRODUCTION

Rappelons que,  $i$  étant un entier  $\geq 0$ , on dit qu'un corps commutatif  $K$  a la propriété  $C_i$  (resp. la propriété  $C_i$  forte) si, pour tout couple  $(d, n)$  d'entiers  $\geq 1$  tels qu'on ait  $n > d^i$ , tout élément  $f$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , non nul, de degré  $d$  et homogène (resp. sans terme constant) possède un zéro non banal dans  $K$ . Ces propriétés ont été étudiées par S. Lang dans [27] et par M. Nagata dans [34]; dans cet article, Nagata remarque qu'on peut étendre la définition ci-dessus au cas où  $i$  est un nombre réel  $\geq 0$  et, dans [28], Lang généralise la définition de la propriété  $C_i$  comme suit: l'entier  $d$  est astreint à appartenir à une partie de l'ensemble des entiers  $\geq 1$ , stable pour la multiplication.

Dans ce texte, je reprends l'étude des propriétés  $C_i$  en traitant les généralisations dont je viens de parler et en généralisant encore sur deux points: je considère des anneaux intègres au lieu de corps et je définis une propriété  $C_i$  qui concerne les polynômes homogènes pour la graduation de type  $\mathbb{Z}/(m)$ ,  $m$  étant un entier  $\geq 1$ , d'une algèbre de polynômes. Comme les connaissances que l'on possède sur la propriété  $C_i$  sont loin de se borner à ce que j'expose ici, j'ai essayé de donner une bibliographie complète.

Je tiens à remercier Messieurs Claude Chevalley et Jean-Pierre Serre qui m'ont aidé dans ce travail et à dire que la démonstration du Théorème 2 de la Section II est due à Serre. Je saisis l'occasion présente pour remercier les professeurs de l'Université de Queen's pour leur hospitalité durant mon séjour au Canada.

### TERMINOLOGIE

Nous utilisons la terminologie et les notations des "Eléments de mathématique" de N. Bourbaki ainsi que celles de la seconde édition des "Foundations of algebraic geometry" de A. Weil.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux que nous considérons sont supposés commutatifs. Dans tout le texte,  $A$  désigne un anneau commutatif; dans les Sections II et III,  $A$  désigne un anneau intègre.

Soient  $A$  un anneau commutatif non nul et  $M$  un  $A$ -module libre, nous appelons rang de  $M$  le cardinal d'une quelconque des bases de  $M$ , deux telles bases étant équipotentes en vertu de Bourbaki, A, II, p. 98, corollaire.

Toutes les algèbres que nous considérons sont supposées unifères.

## I. PRÉLIMINAIRES

### 1. Polynômes

Soient  $f = (f_i)_{i \in I}$  une famille et  $J$  une partie de  $I$ , on appelle restriction de  $f$  à  $J$  la famille indexée par  $J$ , dont l'élément d'indice  $j$  est  $f_j$ . Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $u$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $e = (e_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E$ , on note  $u(e)$  la famille indexée par  $I$ , dont l'élément d'indice  $i$  est  $u(e_i)$ . Soient  $E$  et  $I$  deux ensembles, on note  $(E)_I$  la famille indexée par  $I$ , dont l'élément d'indice  $i$ , pour  $i$  dans  $I$ , est  $E$ .

On appelle système d'entiers, tout élément du  $\mathbf{Z}$ -module libre  $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ . Soit  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  un système d'entiers, on appelle support de  $x$ , l'ensemble des entiers  $i$  tels que  $x_i$  soit non nul; on appelle rang de  $x$  et on note  $\text{rang}(x)$  la somme  $\sum_{i \in \mathbf{N}} x_i$ ; on dit que  $x$  est à coefficients positifs, si pour tout entier  $i$ , on a  $x_i \geq 0$ . On considère l'ensemble  $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$  des systèmes d'entiers comme la  $\mathbf{Z}$ -algèbre du monoïde  $\mathbf{N}$  muni de la multiplication.

Soit  $n$  un entier, on note  $(n)$  l'élément d'indice  $n$  de la base canonique de  $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ . Soient  $a, \dots, l$  des entiers explicites, on note  $(a, \dots, l)$  le système d'entiers  $(a) + \dots + (l)$ . Soit  $n = (n_i)_{i \in I}$  une famille finie d'entiers, on appelle système d'entiers associé à  $n$  et on note  $\bar{n}$  le système d'entiers  $\sum_{i \in I} (n_i)$ . Convenons que les systèmes d'entiers que nous considérerons désormais sont à coefficients positifs et tels que 0 n'appartienne pas à leur support.

Soient  $I$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux anneaux et  $\rho$  un homomorphisme de  $A$  dans  $B$ , on note  $\rho$  l'homomorphisme d'anneau de  $A[X_i]_{i \in I}$  dans  $B[X_i]_{i \in I}$  qui prolonge  $\rho$  et qui, pour tout  $i$  dans  $I$ , applique  $X_i$  en  $X_i$ . On convient de restreindre le sens de l'expression "famille de polynômes" de la manière suivante: une famille de polynômes sera une famille dont les éléments appartiennent à une même algèbre de polynômes. Soit  $f = (f_i)_{i \in I}$  une famille de polynômes, on dit que  $f$  est homogène (resp. sans terme constant), si, pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $f_i$  est homogène (resp. sans terme constant). Soient  $f = (f_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $A[X_s]_{s \in S}$ ,  $B$  une  $A$ -algèbre associative et commutative et  $x$  un élément de  $B^S$ , on note  $f(x)$  l'élément de  $B^I$  dont la  $i$ -ème coordonnée est  $f_i(x)$ .

Soient  $f$  un élément (resp. une famille indexée par  $S$  d'éléments) de  $A[X_i]_{i \in I}$  et  $B$  une  $A$ -algèbre associative et commutative, on appelle fonction polynôme définie par  $f$  et par  $B$ , l'application de  $B^I$  dans  $B$  (resp. dans  $B^S$ ) qui à  $x$  appartenant à  $B^I$  fait correspondre  $f(x)$ ; soit  $z$  un élément de  $B^I$ , on dit que  $z$  est un zéro de  $f$  dans  $B$ , si l'on a  $f(z) = 0$ ; si  $f$  est sans terme constant, l'élément neutre du groupe additif  $B^I$  est un zéro de  $f$  dans  $B$ , dit banal.

On convient que l'expression " $f$  est un polynôme de degré  $p$  (resp. de degré  $\leq p$ , resp. de degré congru à  $p$  modulo  $n$ )" signifie " $f$  est nul ou bien, dans le cas contraire, le degré de  $f$  est  $p$  (resp. le degré de  $f$  est  $\leq p$ , resp. le degré de  $f$  est congru à  $p$  modulo  $n$ )". Soit  $f = (f_i)_{i \in I}$  une famille de polynômes dont tous les éléments sont non nuls, on appelle degré de  $f$ , la famille indexée par  $I$ , dont l'élément d'indice  $i$  est le degré de  $f_i$ .

Soient  $f = (f_i)_{i \in I}$  une famille de polynômes et  $p = (p_i)_{i \in I}$  une famille d'entiers, on dit que  $f$  est de degré  $p$  (resp. de degré  $\leq p$ , resp. de degré congru à  $p$  modulo  $n$ ), si, pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $f_i$  est de degré  $p_i$  (resp. de degré  $\leq p_i$ , resp. de degré congru à  $p_i$  modulo  $n$ ) et on appelle composante homogène de degré  $p$  de  $f$ , la famille indexée par  $I$ , dont l'élément d'indice  $i$ , est la composante homogène de degré  $p_i$  de  $f_i$ . Soient  $f$  un polynôme (resp. une famille de polynômes) et  $m$  un entier (resp. une famille d'entiers) tels que  $f$  soit de degré  $m$ , la composante homogène de degré  $m$  de  $f$  ne dépend pas de  $m$  et est appelée la composante homogène de plus haut degré de  $f$ .

**PROPOSITION 1.** *Soient  $I$  un ensemble fini,  $f$  une famille d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I}$  de degré  $p$ ,  $F$  la composante homogène de plus haut degré de  $f$ ,  $g = (g_i)_{i \in I}$  une famille non nulle de polynômes sur  $A$ ,  $q$  le plus grand des degrés des  $g_i$  non nuls et  $G$  la composante homogène de  $g$  de degré  $(q)_1$ . Alors  $f(g)$  est de degré  $\leq qp$ ; supposons, de plus, que  $f$  soit homogène ou bien qu'on ait  $q > 0$ , alors la composante homogène de degré  $qp$  de  $f(g)$  est  $F(G)$ .*

Démontrons la seconde affirmation de l'énoncé: lorsque  $f$  est homogène, c'est une conséquence de la formule de Taylor (Bourbaki, *Alg.*, Chap. 4, §5, n° 8, Prop. 9); le cas où  $q$  est  $> 0$  se déduit du précédent.

Soient  $n \geq 1$  un entier et  $B = A[X_i]_{i \in I}$  une algèbre de polynômes sur  $A$ , la structure de  $A$ -algèbre graduée de type  $\mathbf{Z}/(n)$ , déduite de celle de type  $\mathbf{Z}$  par l'homomorphisme canonique de  $\mathbf{Z}$  sur  $\mathbf{Z}/(n)$ , est dite canonique; un élément de  $B$  homogène pour cette graduation est dit  $n$ -homogène; une famille d'éléments de  $B$  est dite  $n$ -homogène, si chacun de ses éléments est  $n$ -homogène.

**PROPOSITION 2.** *Soient  $I$  un ensemble fini,  $f$  une famille d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I}$ ,  $n$ -homogène et de degré  $p$ ,  $g = (g_i)_{i \in I}$  une famille non nulle et*

$n$ -homogène de polynômes sur  $A$  et  $q$  le plus grand des degrés des  $g_i$  non nuls. Supposons que  $g$  soit de degré  $\leq (q)_I$  et congru à  $(q)_I$  modulo  $n$ , alors  $f(g)$  est  $n$ -homogène et de degré  $\leq qp$  et congru à  $qp$  modulo  $n$ .

Soient  $I$  un ensemble,  $j$  un objet n'appartenant pas à  $I$ ,  $K$  la réunion de  $I$  et de  $\{j\}$ ,  $u$  l'injection canonique de  $A[X_i]_{i \in I}$  dans  $A[X_k]_{k \in K}$ ,  $f$  un élément de  $A[X_i]_{i \in I}$ ,  $f_n$ , pour  $n$  entier, la composante homogène de degré  $n$  de  $f$  et  $d$  un entier tel que  $f$  soit de degré  $d$ , on appelle homogénéisé de  $f$  par rapport à  $X_j$ , l'élément  $\sum_{m=0}^{m=d} X_j^m u(f_{d-m})$  de  $A[X_k]_{k \in K}$ . Soit  $g = (g_s)_{s \in S}$  une famille de polynômes, on appelle homogénéisée de  $g$  par rapport à  $X_j$ , la famille indexée par  $S$ , dont l'élément d'indice  $s$  est l'homogénéisé de  $g_s$  par rapport à  $X_j$ .

Soient  $I$  et  $J$  des ensembles disjoints,  $I'$  et  $J'$  des ensembles disjoints,  $f$  une famille indexée par  $I$  d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I'}$ ,  $g$  une famille indexée par  $J$  d'éléments de  $A[X_j]_{j \in J'}$ ,  $S$  la réunion de  $I$  et  $J$ ,  $S'$  la réunion de  $I'$  et  $J'$  et  $i'$  et  $j'$  les injections canoniques de  $A[X_i]_{i \in I'}$  et de  $A[X_j]_{j \in J'}$  dans  $A[X_s]_{s \in S'}$ , on appelle juxtaposition de  $f$  et de  $g$  la famille indexée par  $S$  dont la restriction à  $I$  est  $i'(f)$  et dont la restriction à  $J$  est  $j'(g)$ .

Soient  $f = (f_s)_{s \in S}$  et  $g = (g_t)_{t \in T}$  deux familles d'éléments d'une même algèbre de polynômes, on appelle produit de  $f$  par  $g$  la famille indexée par  $S \times T$  dont l'élément d'indice  $(s, t)$  est  $f_s g_t$ .

PROPOSITION 3. Soient  $A$  un anneau intègre,  $f$  un élément non nul de  $A[X_i]_{i \in I}$  (resp. une famille finie d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I}$ , dont aucun n'est nul),  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $A$  telle que, pour tout  $i$  dans  $I$ , le cardinal de  $H_i$  soit strictement supérieur au degré de  $f$  par rapport à  $X_i$  (resp. à la somme des degrés par rapport à  $X_i$  des éléments de  $f$ ), alors il existe un élément  $x$  de  $\prod_{i \in I} H_i$  tel qu'on ait  $f(x) \neq 0$  (resp. tel que chaque élément de  $f(x)$  soit non nul).

On peut supposer  $I$  fini. Le cas d'une famille se ramène à celui d'un polynôme en considérant le produit des éléments de la famille. On raisonne alors par récurrence sur  $\text{card}(I)$ ; lorsque  $I$  est vide, c'est clair; supposons la propriété démontrée pour  $\text{card}(I) = n$  et démontrons la pour  $\text{card}(I) = n + 1$ .

Soient  $\alpha$  un élément de  $I$ ,  $J$  le complémentaire de  $\{\alpha\}$  dans  $I$ ,  $u$  l'injection canonique de  $A[X_j]_{j \in J}$  dans  $A[X_i]_{i \in I}$ ,  $d$  le degré de  $f$  par rapport à  $X_\alpha$  et  $g_0, \dots, g_d$  les éléments de  $A[X_j]_{j \in J}$  tels qu'on ait  $f = \sum_{m=0}^{m=d} u(g_m) X_\alpha^m$ . Soit  $k$  un entier  $\leq d$  tel que  $g_k$  soit non nul, l'hypothèse de récurrence appliquée à  $g_k$  et à la restriction à  $J$  de la famille  $(H_i)_{i \in I}$  fournit un élément  $y = (y_j)_{j \in J}$  de  $\prod_{j \in J} H_j$  tel que  $g_k(y)$  soit non nul. Soit  $F$  l'élément de  $A[X]$  obtenu en substituant dans  $f$  l'indéterminée  $X$  à  $X_\alpha$  et  $y_j$  à  $X_j$ , pour  $j$  dans  $J$ ;  $F$  est non nul et de degré strictement inférieur au cardinal de  $H_\alpha$ , donc, en vertu de Bourbaki, Alg., Chap. 4, §2, n° 4, Th. 2, il existe  $z$  dans  $H_\alpha$  tel qu'on ait  $F(z) \neq 0$ .

**COROLLAIRE 1.** Soient  $K$  un corps fini à  $q$  éléments et  $f$  un élément non nul de  $K[X_i]_{i \in I}$  (resp. une famille finie d'éléments de  $K[X_i]_{i \in I}$ , dont aucun n'est nul); supposons que, pour tout  $i$  dans  $I$ , le degré de  $f_i$  par rapport à  $X_i$  (resp. la somme des degrés par rapport à  $X_i$  des éléments de  $f$ ) soit strictement inférieur ( $e$ ) à  $q$ , alors il existe un élément,  $x$  de  $K^I$  tel que  $f(x)$  soit non nul (resp. tel que chaque élément de  $f(x)$  soit non nul).

**COROLLAIRE 2.** Soient  $K$  un corps fini à  $q$  éléments,  $\mathcal{O}$  l'idéal de  $K[X_i]_{i \in I}$  engendré par les polynômes  $X_i^q - X_i$ , pour  $i$  dans  $I$ , et  $f$  un élément de  $K[X_i]_{i \in I}$ , pour que la fonction polynôme définie par  $f$  et par  $K$  soit nulle, il faut et il suffit que  $f$  appartienne à  $\mathcal{O}$ .

Il est clair que la fonction polynôme définie par un élément de  $\mathcal{O}$  et par  $K$  est nulle. Inversement, soit  $f$  un élément de  $K[X_i]_{i \in I}$ , on voit aisément qu'il existe des éléments  $g$  et  $h$  de  $K[X_i]_{i \in I}$  tels qu'on ait  $f = g + h$ , que  $g$  appartienne à  $\mathcal{O}$  et que  $h$  soit de degré  $\leq q - 1$  par rapport à chacune de ses indéterminées; si la fonction polynôme définie par  $f$  et par  $K$  est nulle, celle définie par  $h$  et par  $K$  est nulle, donc  $h$  est nul d'après le corollaire précédent.

## 2. Polynômes norme et norme réduite

Le définition suivante est plus générale que celle de Bourbaki, A, III, p. 110.

**DÉFINITION 1.** Soient  $B$  une  $A$ -algèbre ayant une base finie et  $b$  un élément de  $B$ , on appelle norme de  $b$  relativement à  $B$  et à  $A$  et on note  $N_{B/A}(b)$ , le déterminant de l'endomorphisme du  $A$ -module  $B$ , qui à  $x$  dans  $B$  associe  $bx$ .

**PROPOSITION 4.** Soient  $B$  une  $A$ -algèbre associative, ayant une base finie,  $B^0$  l'algèbre opposée de  $B$  et  $x$  un élément de  $B$ , alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :  $x$  est inversible à droite dans  $B$ ;  $x$  est inversible à gauche dans  $B$ ;  $N_{B/A}(x)$  est inversible dans  $A$ ;  $N_{B^0/A}(x)$  est inversible dans  $A$ .

L'une quelconque des deux premières conditions entraîne l'une quelconque des deux dernières, en vertu de la multiplicativité de la norme dans une algèbre associative et la réciproque résulte de Bourbaki, A, III, p. 111, Prop. 3.

**PROPOSITION 5.** Soient  $B$  une  $A$ -algèbre ayant une base finie,  $B^0$  l'algèbre opposée de  $B$ ,  $x$  un élément de  $B$  et a), b), c) et d) les propriétés suivantes: a) la multiplication à gauche par  $x$  dans  $B$  est injective; b) la multiplication à droite par  $x$  dans  $B$  est injective; c)  $N_{B/A}(x)$  n'est pas diviseur de zéro dans  $A$ ; d)  $N_{B^0/A}(x)$  n'est pas diviseur de zéro dans  $A$ . Alors a) et c) sont équivalentes; b) et d) sont équivalentes; de plus, si  $B$  est alternative, deux quelconques de a), b), c) et d) sont équivalentes.

L'équivalence de a) et c) ainsi que celle de b) et d) résultent de Bourbaki, A, III, p. 91, Prop. 3. Il suffit de montrer que, lorsque  $B$  est alternative, a) entraîne b), puisque ce résultat appliqué à  $B^0$  et à  $x$  fournit l'implication réciproque. Supposons  $B$  alternative et la condition a) satisfaite. Soient  $u$  la multiplication à gauche par  $x$  dans  $B$ ,  $p$  le polynôme caractéristique de  $u$  et  $n$  le nombre des éléments d'une base finie de  $B$ , alors  $p$  a pour terme constant  $(-1)^n N_{B/A}(x)$  et on a  $p(u) = 0$ , en vertu de Bourbaki, A, III, p. 107. Soit  $1_B$  l'élément unité de  $B$ , on a  $p(u)(1_B) = 0$ , d'où  $p(x) = 0$ . Soit  $y$  dans  $B$  tel que  $yx = 0$ , on a  $yp(x) = 0$ , d'où  $N_{B/A}(x)y = 0$ , et, comme la condition c) est satisfaite, on a  $y = 0$ , ce qui démontre b).

Soient  $B$  une  $A$ -algèbre ayant une base finie  $v = (v_i)_{i \in I}$ ,  $A'$  l'anneau  $A[X_i]_{i \in I}$  et  $B'$  la  $A'$ -algèbre  $A' \otimes_A B$ , alors  $B'$  a la famille  $(1 \otimes v_i)_{i \in I}$  comme base et on appelle polynôme norme de  $B$  sur  $A$  relatif à  $v$  la norme de  $\sum_{i \in I} X_i \otimes v_i$  relativement à  $B'$  et à  $A'$ . Notons  $N_v$  le polynôme norme ainsi défini, alors  $N_v$  est un élément de  $A[X_i]_{i \in I}$ , homogène, de degré card  $I$  et tel que, pour toute famille  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ , on ait

$$N_v((a_i)_{i \in I}) = N_{B/A} \left( \sum_{i \in I} a_i v_i \right).$$

En effet, soit  $V_i$  la matrice par rapport à  $v$  de la multiplication à gauche par  $v_i$  dans  $B$ , on a  $N_{B/A}(\sum_{i \in I} a_i v_i) = \det(\sum_{i \in I} a_i V_i)$ ; la matrice par rapport à  $(1 \otimes v_i)_{i \in I}$  de la multiplication à gauche par  $\sum_{i \in I} X_i \otimes v_i$  dans  $B'$  est  $\sum_{i \in I} X_i V_i$  et on a  $N_v = \det(\sum_{i \in I} X_i V_i)$ .

**PROPOSITION 6.** (i) *Soient  $K$  un corps et  $L$  un surcorps de  $K$ , de degré fini, tout polynôme norme de  $L$  sur  $K$ , considéré comme polynôme sur une clôture algébrique de  $K$ , est un produit de polynômes homogènes de degré 1.*

(ii) *Soient  $K$  un corps,  $K_s$  une clôture séparable de  $K$  et  $f$  un élément non nul et extrémal de  $K[X_i]_{i \in I}$ , produit de  $l$  éléments extrémaux de  $K_s[X_i]_{i \in I}$ ; alors il existe un élément  $\lambda$  de  $K$ , un polynôme  $n$  qui est polynôme norme par rapport à  $K$  d'une extension de  $K$ , séparable, de degré  $l$  et une famille  $g$  d'éléments de  $K[X_i]_{i \in I}$  tels qu'on ait  $f = \lambda n(g)$ .*

L'affirmation (i) est une conséquence de Bourbaki, Alg., Chap. 8, §12, n° 2, Prop. 4. Démontrons (ii). On peut supposer  $I$  fini. Soient  $u$  un élément extrémal de  $K_s[X_i]_{i \in I}$  divisant  $f$  et ayant l'un de ses coefficients égal à un,  $M$  l'extension de  $K$  engendrée par les coefficients de  $u$ ,  $m$  le degré de  $M$  sur  $K$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  les  $K$ -homomorphismes de  $M$  dans  $K_s$ . Les  $\sigma_i(u)$  sont des éléments extrémaux de  $K_s[X_i]_{i \in I}$  qui divisent  $f$ ; ils sont deux à deux étrangers, car, si  $\sigma_p(u)$  et  $\sigma_q(u)$  ne sont pas étrangers, l'un est le produit de l'autre par un élément de  $K_s$ , donc ils sont égaux et on a  $\sigma_p = \sigma_q$ . L'anneau  $K_s[X_i]_{i \in I}$

est factoriel, en vertu de Bourbaki, *Alg. Comm.*, Chap. 7, §3, n° 5, Cor. du Th. 2; donc  $f$  est divisible par le produit des  $\sigma_i(u)$  qui vaut  $N_{M/K}(u)$ , en vertu de Bourbaki, *Alg.*, Chap. 8, §12, n° 2, Prop. 4. Donc  $f$  est de la forme  $\lambda N_{M/K}(u)$  avec  $\lambda$  dans  $K$ . On a  $m - l$ , puisque  $K_s[X_i]_{i \in I}$  est factoriel, et on conclut.

**PROPOSITION 7.** *Soient  $K$  un corps,  $B$  une  $K$ -algèbre simple de centre  $K$  et de rang fini sur  $K$ ,  $B^0$  l'algèbre opposée de  $B$  et  $x$  un élément de  $B$ , les six propriétés suivantes sont équivalentes:  $x$  est inversible à droite dans  $B$ ;  $x$  est inversible à gauche dans  $B$ ;  $x$  n'est pas diviseur de zéro à gauche dans  $B$ ;  $x$  n'est pas diviseur de zéro à droite dans  $B$ ;  $\text{Nrd}_{B/K}(x) \neq 0$ ;  $\text{Nrd}_{B^0/K}(x) \neq 0$ .*

Cela résulte des Propositions 4 et 5 ci-dessus et de Bourbaki, *Alg.*, Chap. 8, §12, n° 3, Prop. 8.

Soient  $K$  un corps,  $B$  une  $K$ -algèbre simple, de centre  $K$  et de rang  $n^2$  sur  $K$ ,  $n$  étant un entier,  $v = (v_i)_{i \in I}$  une base de  $B$ ,  $K'$  le corps  $K(X_i)_{i \in I}$  et  $B'$  la  $K'$ -algèbre  $K' \otimes_K B$ , alors  $B'$  est une  $K'$ -algèbre simple de centre  $K'$  et de rang  $n^2$  sur  $K'$ , en vertu de Bourbaki, *Alg.*, Chap. 8, §7, Cor. 2 du Th. 2 et §1, Cor. de la Prop. 3 et on appelle polynôme norme réduite de  $B$  sur  $K$  relatif à  $v$ , la norme réduite de  $\sum_{i \in I} X_i \otimes v_i$  sur  $K'$ . Notons  $\text{Nrd}_v$  l'objet ainsi défini, alors  $\text{Nrd}_v$  est un élément de  $K[X_i]_{i \in I}$ , non nul, homogène, de degré  $n$  et, pour toute famille  $(k_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $K$ , on a

$$\text{Nrd}_v((k_i)_{i \in I}) = \text{Nrd}_{B/K}(\sum_{i \in I} k_i v_i).$$

En effet, soient  $L$  un corps neutralisant de  $B$ ,  $h$  un isomorphisme de  $L \otimes_K B$  sur  $M_n(L)$ ,  $L'$  le corps  $L(X_i)_{i \in I}$ , et, pour  $i$  dans  $I$ ,  $V_i = h(1 \otimes v_i)$ , on a  $\text{Nrd}_{B/K}(\sum_{i \in I} k_i v_i) = \det(\sum_{i \in I} k_i V_i)$ ;  $1 \otimes h$  est un isomorphisme de  $L' \otimes_{K'} B'$  sur  $M_n(L')$  et on a  $\text{Nrd}_v = \det(\sum_{i \in I} X_i V_i)$ .

### 3. Le théorème de Chevalley-Waring

**THÉORÈME 1.** *Soient  $K$  un corps fini de caractéristique  $p$  et  $f = (f_i)_{i=1, \dots, m}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , de degré  $(d_i)_{i=1, \dots, m}$  telle qu'on ait  $n > d_1 + \dots + d_m$ , alors le nombre des zéros de  $f$  dans  $K$  est un multiple de  $p$ .*

Le lecteur pourra consulter [40, p. 13], pour la démonstration.

**COROLLAIRE 1.** *Soient  $K$  un corps fini de caractéristique  $p$ ,  $f = (f_i)_{i=1, \dots, m}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_n]$  de degré  $(d_i)_{i=1, \dots, m}$  et  $F$  la composante homogène de plus haut degré de  $f$ ; alors, si l'on a  $n \geq d_1 + \dots + d_m$ , le nombre des zéros de  $f$  dans  $K$  est congru modulo  $p$  au nombre des zéros de  $F$  dans  $K$ .*

Soient  $q$  le nombre des éléments de  $K$ ,  $h$  l'homogénéisé de  $f$  par rapport à  $X_{n+1}$  et  $f'$ ,  $F'$  et  $h'$  les nombres de zéros de  $f$ ,  $F$  et  $h$  dans  $K$ . Les zéros de  $h$  dans  $K$  se composent de ceux dont la  $n + 1$ -ème coordonnée est nulle, dont le nombre est  $F'$  et de ceux dont la  $n + 1$ -ème coordonnée est non nulle, dont le nombre est  $(q - 1)f'$ ; on a donc  $h' = F' + (q - 1)f'$ . Le Théorème 1 montre que  $h'$  est un multiple de  $p$ , d'où le résultat.

**COROLLAIRE 2.** Soient  $K$  un corps fini et  $f = (f_i)_{i=1, \dots, m}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , de degré  $(d_i)_{i=1, \dots, m}$ , sans terme constant, telle que le zéro banal de  $f$  dans  $K$  soit le seul zéro de  $f$  dans  $K$ , alors on a  $n \leq d_1 + \dots + d_m$ .

*Remarque.* Sous les hypothèses du Théorème 1, le nombre des zéros de  $f$  dans  $K$  est un multiple du nombre des éléments de  $K$ . Ce résultat qui précise le Théorème 1 a été démontré par J. Ax dans [2].

## II. ANISOTROPIE

### 1. Notion de polynôme anisotrope

**DÉFINITION 1.** Soient  $A$  un anneau intègre et  $f$  un polynôme (resp. une famille finie de polynômes sur  $A$ ), en les indéterminées  $X_i$ , pour  $i$  dans  $I$ , on dit que  $f$  est anisotrope si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(a)  $I$  est fini.

(b)  $f$  est sans terme constant et le zéro banal de  $f$  dans  $A$  est le seul zéro de  $f$  dans  $A$ .

On dit qu'un polynôme (resp. une famille finie de polynômes) sur un anneau intègre est isotrope, si il (elle) n'est pas anisotrope. Soient  $K$  le corps des fractions de  $A$ ,  $i$  l'injection canonique de  $A$  dans  $K$  et  $f$  une famille homogène de polynômes sur  $A$ , pour que  $f$  soit anisotrope, il faut et il suffit que  $i(f)$  soit anisotrope.

**EXEMPLES.** 1) Soient  $K$  un corps et  $B$  une  $K$ -algèbre de rang fini, telle que, pour  $x$  et  $y$  dans  $B$ , la relation  $xy = 0$  entraîne la nullité de  $x$  ou de  $y$ , alors tout polynôme norme de  $B$  sur  $K$  est anisotrope en vertu de la Proposition 5 de la Section I.

2) Soient  $K$  un corps et  $B$  un corps non nécessairement commutatif, de centre  $K$  et de rang fini sur  $K$ , tout polynôme norme réduite de  $B$  sur  $K$  est anisotrope en vertu de la Proposition 7 de la Section I.

3) Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $m \geq 1$  un entier, et  $(a_i)_{i=1, \dots, s}$  une suite d'éléments de  $K$  linéairement indépendants sur le corps  $K^{\mu^m}$ , le polynôme  $a_1 X_1^{\mu^m} + \dots + a_s X_s^{\mu^m}$  de  $K[X_1, \dots, X_s]$  est anisotrope.

PROPOSITION 1. Soient  $f$  un élément anisotrope de  $A[X_i]_{i \in I}$  (resp. une famille finie et anisotrope d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I}$ ) et  $g = (g_i)_{i \in I}$  une famille anisotrope de polynômes sur  $A$ , alors  $f(g)$  est anisotrope.

Soient  $f$  un élément anisotrope de  $A[X_i]_{i \in I}$  (resp. une famille finie et anisotrope d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I}$ ),  $J$  une partie de  $I$ , et  $g$  l'élément (resp. la famille d'éléments) de  $A[X_j]_{j \in J}$  obtenu (e) en substituant dans  $f$  l'indéterminée  $X_j$  à  $X_j$  pour  $j$  dans  $J$  et 0 à  $X_i$  pour  $i$  dans  $I$ , mais non dans  $J$ ; alors  $g$  est anisotrope et s'appelle le polynôme anisotrope (resp. la famille anisotrope de polynômes) obtenu (e) en annulant dans  $f$  les indéterminées dont l'indice n'est pas dans  $J$ .

Soient  $I, I', J$  et  $J'$  quatre ensembles finis tels que  $I$  et  $J$  soient disjoints ainsi que  $I'$  et  $J'$ ,  $f$  une famille, indexée par  $I$ , d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I'}$ ,  $g$  une famille, indexée par  $J$ , d'éléments de  $A[X_j]_{j \in J'}$  et  $h$  la juxtaposition de  $f$  et de  $g$ ; pour que  $h$  soit anisotrope, il faut et il suffit que  $f$  et  $g$  le soient.

Sous les hypothèses précédentes, soit encore  $n$  une famille indexée par  $I \cup J$  d'éléments de  $A[X_k]_{k \in I' \cup J'}$ , dont la restriction à  $I$  est nulle et dont tout élément appartient à l'idéal  $\sum_{i \in I'} (X_i)$ , alors, si  $f$  et  $g$  sont anisotropes,  $h + n$  est anisotrope; en effet, soient  $x$  un zéro de  $h + n$  dans  $A$  et  $y$  la restriction de  $x$  à  $I$ , on a  $f(y) = 0$ , d'où  $y = 0$ , on en tire  $n(x) = 0$ , puis  $h(x) = 0$  et  $x = 0$ .

Soient  $f = (f_i)_{i \in I}$  une famille finie de polynômes sur  $A$ ,  $(d_i)_{i \in I}$  une famille d'entiers dont aucun n'est nul et  $F$  la famille, indexée par  $I$ , dont l'élément d'indice  $i$  est  $f_i^{d_i}$ , alors, pour que  $F$  soit anisotrope, il faut et il suffit que  $f$  le soit. Soient  $f$  et  $g$  deux familles finies et sans termes constants d'éléments d'une même algèbre de polynômes sur  $A$ , alors, pour que le produit de  $f$  par  $g$  soit anisotrope, il faut et il suffit que  $f$  et  $g$  le soient.

PROPOSITION 2. Soient  $K$  le corps des fractions de  $A$ ,  $K_s$  une clôture séparable de  $K$  et  $f$  un élément de  $A[X_i]_{i \in I}$ , non nul, anisotrope, extrémal dans  $K[X_i]_{i \in I}$  et produit de  $l$  éléments extrémaux de  $K_s[X_i]_{i \in I}$ , alors il existe un élément  $\lambda$  de  $K$ , un polynôme  $n$  à coefficients dans  $A$  qui est polynôme norme par rapport à  $K$  d'une extension de  $K$ , séparable, de degré  $l$  et une famille anisotrope  $g$  d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I}$  tels qu'on ait  $f = \lambda n(g)$ .

La Proposition 6, (ii) de la Section I nous fournit des éléments  $\lambda_1$ ,  $n_1$  et  $g_1$  tels qu'on ait  $f = \lambda_1 n_1(g_1)$ ; soient  $\mu$  et  $\nu$  des éléments non nuls de  $A$  tels que  $n = \mu^l n_1$  et  $g = \nu g_1$  soient à coefficients dans  $A$ , alors on a  $f = \lambda_1 (\mu \nu)^{-l} n(g)$  et  $g$  est anisotrope, puisque  $f$  est anisotrope.

## 2. Les fonctions $\phi$ et $\phi_n$

DÉFINITION 2. Soient  $K$  un corps (resp.  $A$  un anneau intègre et  $n \geq 1$  un entier) et  $s$  un système d'entiers, on note  $\phi(K, s)$  (resp.  $\phi_n(A, s)$ ) la borne supérieure dans la droite achevée  $\bar{\mathbf{R}}$  de l'ensemble des entiers qui sont nombre d'indéterminées d'une famille finie de polynômes sur  $K$  (resp.  $A$ ), homogène (resp.  $n$ -homogène), anisotrope, dont tout élément est non nul et dont le degré  $\alpha$  pour système d'entiers associé.

Soit  $x \geq 1$  un entier, on note  $\phi(K, x)$  et  $\phi_n(A, x)$  les nombres  $\phi(K, (x))$  et  $\phi_n(A, (x))$ ; soient  $a, \dots, l$  des entiers explicites dont aucun n'est nul, on note  $\phi(K, a, \dots, l)$  et  $\phi_n(A, a, \dots, l)$  les nombres  $\phi(K, (a, \dots, l))$  et  $\phi_n(A, (a, \dots, l))$ .

Soient  $K$  un corps,  $r \geq 0$  un entier et  $s$  et  $t$  des systèmes d'entiers, on a  $\phi(K, s) \geq \text{rang}(s)$ ,  $\phi(K, r(1)) = r$  et  $\phi(K, s + t) \geq \phi(K, s) + \phi(K, t)$  et  $\phi_n(A, s + t) \geq \phi_n(A, s) + \phi_n(A, t)$ .

Soient  $s$  un système d'entiers,  $d$  une famille d'entiers telle que  $\bar{d} = s$  et  $f$  une famille finie de polynômes sur le corps  $K$  (resp. sur  $A$ ), homogène (resp.  $n$ -homogène), anisotrope et de degré  $d$ , alors le nombre des indéterminées de  $f$  est inférieur ou égal à  $\phi(K, s)$  (resp.  $\phi_n(A, s)$ ).

PROPOSITION 3. Soient  $n \geq 1$  un entier,  $K$  un corps fini et  $d = (d_i)_{i=1, \dots, r}$  une suite d'entiers dont aucun n'est nul, on a

$$\phi(K, d) = \phi_n(K, \bar{d}) = d_1 + \dots + d_r.$$

Soit  $l \geq 1$  un entier,  $K$  possède une extension finie  $L$  de degré  $l$ , en vertu de Bourbaki, *Alg.*, Chap. 5, §11, n° 4, Prop. 3; tout polynôme norme de  $L$  sur  $K$  est anisotrope et homogène, donc on a  $\phi(K, l) \geq l$ . On en déduit  $\phi(K, \bar{d}) \geq d_1 + \dots + d_r$  et le Corollaire 2 du Théorème 1 de la Section I permet de conclure.

PROPOSITION 4. (i) Soient  $K$  un corps,  $p \geq 1$  un entier et  $s$  un système d'entiers. Si  $\phi(K, s)$  est infini,  $\phi(K, (p) \cdot s)$  est infini; si  $\phi(K, s)$  est fini, on a  $\phi(K, (p) \cdot s) \geq \phi(K, \phi_n(K, s)(p))$ .

(ii) Soient  $n \geq 1$  un entier,  $p \geq 1$  un entier et  $s$  un système d'entiers. Si  $\phi_n(A, s)$  est infini,  $\phi_n(A, (p) \cdot s)$  est infini; si  $\phi_n(A, s)$  est fini, on a

$$\phi_n(A, (p) \cdot s) \geq \phi_n(A, \phi_n(A, s)(p)).$$

Démontrons (i) (resp. (ii)). Soient  $f$  une famille finie d'éléments de  $K[X_i]_{i \in I}$  (resp.  $A[X_i]_{i \in I}$ ), anisotrope, homogène (resp.  $n$ -homogène), dont aucun élément n'est nul, de degré  $d$  tel que  $\bar{d} = s$  et  $(g_i)_{i \in I}$  une famille de polynômes sur  $K$  (resp.  $A$ ), anisotrope, homogène (resp.  $n$ -homogène), dont chaque élément est non nul et de degré  $p$ . Alors  $f(g)$  est anisotrope, homogène

et de degré  $pd$ ; d'où (i). (resp. On peut supposer  $A$  infini; car, si  $A$  est fini,  $A$  est un corps fini et l'inégalité à démontrer résulte de la Proposition 3. Soient  $F$  la composante homogène de plus haut degré de  $f$  et  $G$  la composante homogène de degré  $(p)_I$  de  $g$ . En vertu de la Proposition 3 de la Section I, il existe une famille  $a = (a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ , dont aucun n'est nul, telle que tout élément de  $F(a)$  soit non nul et une famille  $x$  d'éléments de  $A$  telle que tout élément de  $G(x)$  soit non nul. Soit  $b = (b_i)_{i \in I}$  la famille d'éléments de  $A$  telle que, pour  $i$  dans  $I$ , on ait  $b_i = a_i \prod_{j \neq i} G_j(x)$ , alors tout élément de  $F(bG)$  est non nul. La famille  $f(bg)$  est anisotrope,  $n$ -homogène, a  $F(bG)$  pour composante homogène de degré  $pd$ , en vertu de la Proposition 1 de la Section I, et a donc pour degré  $pd$ ; d'où (ii).)

**COROLLAIRE 1.** *Soient  $K$  un corps,  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$  des entiers et  $s$  un système d'entiers, on a:*

$$\phi(K, (p) \cdot s) \geq \phi(K, p) \phi(K, s)$$

$$\phi_n(A, (p) \cdot s) \geq \phi_n(A, p) \phi_n(A, s).$$

**COROLLAIRE 2.** *Soient  $K$  un corps,  $n \geq 1$ ,  $p \geq 1$  et  $r \geq 0$  des entiers, on a  $\phi(K, p^r) \geq \phi(K, p)^r$  et  $\phi_n(A, p^r) \geq \phi_n(A, p)^r$ .*

**PROPOSITION 5.** *Soient  $n \geq 1$ ,  $d \geq 1$  deux entiers et  $s$  un système d'entiers de rang  $r$  tels que  $d$  appartienne au support de  $s$  et que les éléments de ce support soient  $\leq d$  et congrus à  $d$  modulo  $n$ , alors on a  $\phi_n(A, s) \leq \phi_n(A, r(d))$ .*

En effet, soit  $f = (f_i)_{i=1, \dots, r}$  une famille de polynômes sur  $A$ , dont aucun élément n'est nul, anisotrope,  $n$ -homogène, telle que  $s$  soit le système d'entiers associé au degré de  $f$ , que les  $f_i$  d'indice  $\leq k$  soient de degré  $d$  et que les  $f_i$  d'indice  $> k$  soient de degré  $\leq d - 1$ . Soit  $g = (g_i)_{i=1, \dots, r}$  la famille de polynômes telle que, pour  $i \leq k$ , on ait  $g_i = f_i$  et que, pour  $i > k$ , on ait  $g_i = f_i + f_1$ ; alors  $g$  est anisotrope,  $n$ -homogène et a tous ses éléments non nuls et de degré  $d$ .

**PROPOSITION 6.** *Soient  $K$  un corps infini et  $d \geq 1$  un entier tels qu'on ait  $\phi(K, d) = 1$ , alors tout polynôme sur  $K$ , non nul, de degré  $d$ , dont l'ensemble des zéros dans  $K$  est fini, a une indéterminée; en particulier, on a  $\phi_1(K, d) = 1$ .*

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'on ait un élément  $f$  de  $K[X_1, X_2]$ , non nul, de degré  $d$ , dont l'ensemble des zéros dans  $K$  soit fini. Identifions l'espace affine  $S^2$  au complémentaire d'une droite de l'espace projectif  $\mathbf{P}^2$  et  $S^1$  au complémentaire d'un point de  $\mathbf{P}^1$ . Soient  $\Gamma$  le diviseur de  $\mathbf{P}^2$  qui induit  $(f)$  sur  $S^2$  et dont le support ne contient pas la droite à

l'infini,  $D$  une droite de  $\mathbf{P}^2$ , définie sur  $K$ , ne contenant aucun des points à l'infini de  $\Gamma$ , aucun des zéros de  $f$  dans  $K$  et coupant  $\Gamma$  proprement et  $h$  un isomorphisme de  $D$  sur  $\mathbf{P}^1$ , défini sur  $K$ , appliquant le point à l'infini de  $D$  en le point à l'infini de  $\mathbf{P}^1$ . Alors  $h(\Gamma \cdot D)$ , considéré comme un cycle de  $S^1$ , est le diviseur d'un élément  $u$  de  $K[X_1]$ , de degré  $d$  et n'ayant pas de zéro dans  $K$ ; l'homogénéisé de  $u$  par rapport à  $X_2$  est un élément de  $K[X_1, X_2]$ , homogène, de degré  $d$  et anisotrope, ce qui est absurde.

### 3. Les dimensions diophantiennes

On appelle partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ , toute partie  $S$  de  $\mathbf{N}$  ayant les quatre propriétés suivantes: 0 n'appartient pas à  $S$ ; 1 appartient à  $S$ ;  $S \neq \{1\}$ ; tout produit de deux éléments de  $S$  appartient à  $S$ .

DÉFINITION 3. Soient  $K$  un corps et  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ , on appelle  $S$ -dimension diophantienne de  $K$  et on note  $dd_S(K)$  la borne supérieure dans la droite achevée  $\bar{\mathbf{R}}$  de l'ensemble des nombres de la forme  $\log_x \phi(K, x)$  pour un entier  $x$  appartenant à  $S$  et distinct de 1. Soient  $A$  un anneau intègre et  $n \geq 1$  un entier, on appelle  $n$ -dimension diophantienne de  $A$  et on note  $dd_n(A)$  la borne supérieure dans  $\bar{\mathbf{R}}$  de l'ensemble des nombres de la forme  $\log_x \phi_n(A, x)$  pour un entier  $x > 1$  et étranger à  $n$ .

Avec ces notations, on a  $dd_S(K) \geq 0$  et  $dd_n(A) \geq 0$ . Soient  $K$  un corps et  $\mathbf{N}^*$  le complémentaire de  $\{0\}$  dans  $\mathbf{N}$ , la  $\mathbf{N}^*$ -dimension diophantienne de  $K$  s'appelle la dimension diophantienne de  $K$  et se note  $dd(K)$ .

EXEMPLE. Soient  $K$  un corps fini,  $n \geq 1$  un entier et  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ , on a  $dd_n(K) = dd_S(K) = 1$ , vu la Proposition 3.

Soient  $K$  un corps,  $S$  et  $T$  deux parties multiplicatives de  $\mathbf{N}$  telles qu'on ait  $S \subset T$ , on a  $dd_S(K) \leq dd_T(K)$ . Soient  $K$  un corps,  $n \geq 1$  un entier et  $S$  la partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  formée des entiers  $> 1$  et étrangers à  $n$ , on a  $dd_S(K) \leq dd_n(K)$ . Soient  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  des entiers tels que  $n$  soit un multiple de  $m$ , on a  $dd_n(A) \leq dd_m(A)$ .

Remarque 1. Soient  $K$  un corps,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  et  $r > 1$  un entier, alors, appliquant le Corollaire 2 de la Proposition 4 aux éléments de  $S$  qui sont  $< r$ , on a

$$dd_S(K) = \sup_{x \in S, x < r} \log_x \phi(K, x);$$

donc on a

$$dd_S(K) = \limsup_{x \in S} \log_x \phi(K, x),$$

la limite supérieure étant relative à la trace sur  $S$  du filtre de Fréchet. De même, si  $n \geq 1$  et  $r > 1$  sont des entiers et si l'on note  $(a, b)$  le p. g. c. d. de deux entiers  $a$  et  $b$ , on a

$$dd_n(A) = \sup_{(x,n)=1, x \geq r} \log_x \phi_n(A, x)$$

et

$$dd_n(A) = \limsup_{(x,n)=1} \log_x \phi_n(A, x).$$

*Remarque 2.* Soient  $K$  un corps,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  et  $T$  l'ensemble des entiers  $t \geq 1$  tels qu'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $t^n$  appartienne à  $S$ , alors  $T$  est une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  contenant  $S$  et, appliquant le Corollaire 2 de la Proposition 4 aux éléments de  $T$ , on a  $dd_T(K) = dd_S(K)$ .

*Remarque 3.* Soient  $K$  un corps,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  et  $r > 1$  un entier tels que  $S$  contienne un multiple de  $r$ , alors l'ensemble  $T$  formé de 1 et des éléments de  $S$  qui sont multiples de  $r$  est une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  contenue dans  $S$  et on a  $dd_T(K) = dd_S(K)$ . En effet, soit  $t \neq 1$  un élément de  $T$ , on a  $dd_T(K) \geq \sup_{x \in S} \log_{tx} \phi(K, tx)$ ; d'où

$$dd_T(K) \geq \limsup_{x \in S} (\log x)(\log tx)^{-1} \log_x \phi(K, x);$$

d'où, en vertu de la Remarque 1,  $dd_T(K) \geq dd_S(K)$ ; d'où enfin  $dd_T(K) = dd_S(K)$ .

**THÉORÈME 1.** (i) Soient  $A$  un corps,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ ,  $\alpha = dd_S(A)$ ,  $d$  un élément de  $S$ ,  $r \geq 0$  un entier et supposons qu'on ait  $0 < \alpha < +\infty$ , alors on a  $\phi(A, r(d)) \leq rd^\alpha$ .

(ii) Soient  $n \geq 1$  un entier,  $\alpha = dd_n(A)$ ,  $d$  un entier  $\geq 1$  et étranger à  $n$ ,  $r \geq 0$  un entier et supposons qu'on ait  $0 < \alpha < +\infty$ , alors on a

$$\phi_n(A, r(d)) \leq rd^\alpha.$$

Démontrons (i) (resp. (ii)). Nous noterons  $[x]$  la partie entière d'un nombre réel  $x$  et  $\varphi$  la fonction  $\phi$  (resp.  $\phi_n$ ). On peut supposer  $r \geq 1$ . Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on ait  $\varphi(A, r(d)) > rd^\alpha$ . Soient  $m$  un entier tel que  $\varphi(A, r(d)) \geq m > rd^\alpha$  et  $a$  un nombre réel tel que  $mr^{-1} > a > d^\alpha$ . Le Corollaire 2 de la Proposition 4 nous fournit un élément  $\mu$  de  $S$  (resp. un entier  $\mu \geq 1$  et étranger à  $n$ ) tel qu'on ait  $\varphi(A, \mu) \geq mr(m - ar)^{-1}$ . Soit  $(n_i)_{i \in \mathbf{N}}$  la suite d'entiers définie par  $n_i = \varphi(A, \mu d^i)$ .

Pour tout entier  $i$ , on a  $n_{i+1} \geq \varphi(A, n_i(d))$  en vertu de la Proposition 4; d'où  $n_{i+1} \geq \varphi(A, r[n_i r^{-1}](d))$ ; d'où  $n_{i+1} \geq [n_i r^{-1}] \varphi(A, r(d))$ ; d'où  $n_{i+1} \geq m[n_i r^{-1}]$ . Pour tout  $i$ , on a  $n_{i+1} \geq a n_i$ ; en effet, supposons cette inégalité démontrée pour les entiers  $< p$  et démontrons la pour l'entier  $p$ ; la suite  $(n_i)_{i=0, \dots, p}$  est croissante; on a  $n_p \geq mr(m - ar)^{-1}$ ; d'où

$$n_{p+1} \geq m[n_p r^{-1}] > m(n_p r^{-1} - 1) \geq a n_p.$$

Soit  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_i = n_i(\mu d^i)^{-\alpha}$ ; on a  $u_{i+1}/u_i \geq a/d^\alpha$ ; donc  $u_i$  tend vers l'infini, lorsque  $i$  croît indéfiniment; il existe un entier  $l$  tel qu'on ait  $u_l > 1$ , c'est à dire  $\varphi(A, \mu d^l) > (\mu d^l)^\alpha$ , ce qui est absurde.

**PROPOSITION 7.** (i) Soient  $A$  un corps,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  et  $d = (d_i)_{i=1, \dots, i}$  une suite d'éléments de  $S$ ; supposons que  $\alpha = dd_S(A)$  soit un entier  $\geq 1$  et que, pour tout  $x$  dans  $S$ , on ait  $\phi(A, x) = x^\alpha$ , alors on a  $\phi(A, \bar{d}) = d_1^\alpha + \dots + d_i^\alpha$ .

(ii) Soient  $n \geq 1$  un entier et  $d = (d_i)_{i=1, \dots, i}$  une suite d'entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $n$ ; supposons que  $\alpha = dd_n(A)$  soit un entier  $\geq 1$  et que, pour tout entier  $x \geq 1$  et étranger à  $n$ , on ait  $\phi_n(A, x) = x^\alpha$ , alors on a  $\phi_n(A, \bar{d}) = d_1^\alpha + \dots + d_i^\alpha$ .

Démontrons (i) (resp. (ii)). Il suffit de montrer que, si  $(f_i)_{i=1, \dots, i}$  est une suite d'éléments de  $A[X_1, \dots, X_p]$ , anisotrope, de degré  $d$  et homogène (resp.  $n$ -homogène), on a  $p \leq d_1^\alpha + \dots + d_i^\alpha$ . Soient  $e = d_1 \dots d_i$  et, pour  $\iota = 1, \dots, i$ ,  $e_\iota = e d_\iota^{-1}$  et  $n_\iota$  un élément de  $A[X_1, \dots, X_{e_\iota}^\alpha]$ , anisotrope, de degré  $e_\iota$ , homogène (resp.  $n$ -homogène). Pour  $\iota = 1, \dots, i$  et  $\epsilon = 1, \dots, e^\alpha$ , soit  $f_{\iota, \epsilon}$  l'élément de  $A[X_1, \dots, X_{pe^\alpha}]$ , obtenu en substituant dans  $f_i$  l'indéterminée  $X_{(\epsilon-1)p+j}$  à  $X_j$  pour  $j = 1, \dots, p$ . Pour  $\iota = 1, \dots, i$  et  $\delta = 1, \dots, d_i^\alpha$ , soit  $g_{\iota, \delta}$  le polynôme obtenu en substituant dans  $n_\iota$ , le polynôme  $f_{\iota, (\delta-1)e_\iota^\alpha+j}$  à  $X_j$  pour  $j = 1, \dots, e_\iota^\alpha$ . Chaque  $g_{\iota, \delta}$  est homogène, de degré  $e$  (resp.  $n$ -homogène, de degré  $\leq e$  et congru à  $e$  modulo  $n$ ) et la famille  $(g_{\iota, \delta})_{\iota=1, \dots, i; \delta=1, \dots, d_i^\alpha}$  est anisotrope. Le Théorème 1 (resp. le Théorème 1 et la Proposition 5) nous donne  $pe^\alpha \leq (d_1^\alpha + \dots + d_i^\alpha) e^\alpha$ ; d'où  $p \leq d_1^\alpha + \dots + d_i^\alpha$ .

#### 4. Corps de dimension zéro

**LEMME 1.** Soient  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ ,  $q$  une puissance de  $p$ ,  $B$  l'anneau  $K[X_1, \dots, X_r]$  muni de sa graduation canonique de type  $\mathbf{Z}/(q)$ ,  $M$  et  $N$  deux  $B$ -modules gradués de type  $\mathbf{Z}/(q)$ , de type fini, non réduits à un élément, de dimensions  $m$  et  $n$  et  $\mathfrak{z}(M)$  et  $\mathfrak{z}(N)$  les cycles de dimensions  $m$  et  $n$  associés à  $M$  et à  $N$ . Supposons qu'on ait  $m + n = r$  et que la dimension du  $B$ -module  $M \otimes_B N$  soit  $> 0$ , alors  $\mathfrak{z}(M)$  et  $\mathfrak{z}(N)$  se coupent proprement et, dans le produit d'intersection  $\mathfrak{z}(M) \cdot \mathfrak{z}(N)$ , le coefficient de tout point distinct de l'origine est un multiple de  $q$ .

Soit  $P$  un point de  $S'$  distinct de l'origine. On peut supposer que  $P$  n'appartient pas à l'hyperplan de  $S'$  d'équation  $X_1 = 0$ . Soient  $C$  le sous-anneau de  $B$  formé des éléments homogènes de degré zéro et  $\mathcal{M}$  l'idéal maximal de  $B$  formé des éléments de  $B$  qui sont nuls en  $P$ . Soient  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $M_1$  et  $N_1$  les anneaux et modules de fractions de  $B$ ,  $C$ ,  $M$  et  $N$  définis par  $\{X_1^q\}$ ;  $B_1$  est gradué de type  $\mathbf{Z}/(q)$ ,  $C_1$  est le sous-anneau de  $B_1$  formé des éléments homogènes de degré zéro et  $B_1$  est un  $C_1$ -module libre de rang  $q$ ;  $M_1$  et  $N_1$  sont des  $B_1$ -modules gradués de type  $\mathbf{Z}/(q)$ . Soient  $M'$  et  $N'$  les sous- $C_1$ -modules de  $M_1$  et  $N_1$  formés des éléments homogènes de degré zéro, les applications canoniques de  $B_1 \otimes_{C_1} M'$  dans  $M_1$  et de  $B_1 \otimes_{C_1} N'$  dans  $N_1$  sont des isomorphismes de  $B_1$ -modules. L'ensemble  $S = C \cap (B - \mathcal{M})$  contient  $X_1^q$  et est une partie multiplicative de  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$  et  $C_1$ ; on a  $(B - \mathcal{M})^q \subset S$ ; on a  $B_{\mathcal{M}} = S^{-1}B = S^{-1}B_1$ ,  $M_{\mathcal{M}} = S^{-1}M = S^{-1}M_1$ ,  $N_{\mathcal{M}} = S^{-1}N = S^{-1}N_1$ ; les  $B_{\mathcal{M}}$ -modules  $M_{\mathcal{M}}$  et  $N_{\mathcal{M}}$  sont isomorphes à  $S^{-1}B \otimes_{S^{-1}C} S^{-1}M'$  et à  $S^{-1}B \otimes_{S^{-1}C} S^{-1}N'$ .

En vertu de [39, Chapitre V, C, Proposition 1],  $z(M)$  et  $z(N)$  se coupent proprement et le coefficient de  $P$  dans  $z(M) \cdot z(N)$  est  $\sum_{i=0}^{i=r} (-1)^i e_i$ , où  $e_i$  est la longueur du  $B_{\mathcal{M}}$ -module  $\text{Tor}_i^{B_{\mathcal{M}}}(M_{\mathcal{M}}, N_{\mathcal{M}})$ . Nous allons montrer que chaque  $e_i$  est un multiple de  $q$ , ce qui prouvera le lemme. Comme  $S^{-1}B$  est un  $S^{-1}C$ -module libre,  $\text{Tor}_i^{B_{\mathcal{M}}}(M_{\mathcal{M}}, N_{\mathcal{M}})$  est isomorphe à

$$S^{-1}B \otimes_{S^{-1}C} \text{Tor}_i^{S^{-1}C}(S^{-1}M', S^{-1}N').$$

L'anneau  $B_{\mathcal{M}}$  est local de corps résiduel  $K$ , donc  $e_i$  est le rang du  $K$ -espace vectoriel  $S^{-1}B \otimes_{S^{-1}C} \text{Tor}_i^{S^{-1}C}(S^{-1}M', S^{-1}N')$  qui est le produit par  $q$  du rang du  $K$ -espace vectoriel  $\text{Tor}_i^{S^{-1}C}(S^{-1}M', S^{-1}N')$ .

**PROPOSITION 8.** *Soient  $K$  un corps,  $n \geq 1$  un entier et  $(f_i)_{i=1, \dots, m}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_{m+1}]$ , dont aucun n'est nul, de degré  $(d_i)_{i=1, \dots, m}$ ,  $n$ -homogène, sans terme constant, alors il existe un cycle  $\Gamma$  de  $S^{m+1}$ , de dimension 1, positif, rationnel sur  $K$ , dont le support est contenu dans le support de chacun des diviseurs  $(f_i)$ , tel que l'origine appartienne au support de  $\Gamma$  et ait sur  $\Gamma$  une multiplicité congrue à  $d_1 \cdots d_m$  modulo  $n$ , et que  $\Gamma$  soit invariant par l'action d'un élément quelconque du groupe des racines  $n$ -èmes de 1 dans une clôture algébrique de  $K$ , ce groupe opérant sur  $S^{m+1}$  en sorte que, si  $\zeta$  est une racine  $n$ -ème de 1 et si  $M = (x_1, \dots, x_{m+1})$  est un point de  $S^{m+1}$ , alors  $\zeta M$  soit le point  $(\zeta x_1, \dots, \zeta x_{m+1})$ .*

Nous considérerons  $S^{m+2} = S^{m+1} \times S^1$  comme plongé dans  $\mathbf{P}^{m+1} \times S^1$  par une identification de  $S^{m+1}$  au complémentaire d'un hyperplan de  $\mathbf{P}^{m+1}$ . Pour un cycle  $z$  de  $S^{m+2}$ , nous noterons  $z'$  le cycle de  $\mathbf{P}^{m+1} \times S^1$  qui est l'adhérence de  $z$ . Soient  $D$  la droite de  $S^{m+2}$  d'équations  $X_1 = \cdots = X_m = 0$

et  $X_{m+2} = 0$  et, pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $g_i$  le polynôme  $X_i^{d_i} + X_{m+2}(f_i - X_i^{d_i})$  de  $K[X_1, \dots, X_{m+2}]$ .

Les diviseurs  $(g_1)', \dots, (g_m)'$  et  $(X_{m+2})'$  de  $\mathbf{P}^{m+1} \times S^1$  se coupent proprement et leur produit d'intersection est  $d_1 \cdots d_m D'$ , en vertu de l'associativité de ce produit. Toute composante de l'intersection des supports des diviseurs  $(g_1)', \dots, (g_m)'$  qui a  $S^1$  pour projection géométrique sur le  $m+2$ -ème facteur de  $S^{m+2}$  est de dimension 2; en effet, soit  $V$  une telle composante; la projection ensembliste de  $V'$  sur  $S^1$  est  $S^1$ , en vertu de [45, Chapitre 7, n° 5, Corollaire du Théorème 7]; l'intersection des supports de  $V'$  et  $(X_{m+2})'$  est non vide et contenue dans  $D'$ , donc  $V'$  est de dimension  $\leq 2$ ; il en résulte que  $V$  est de dimension 2. Soit  $z$  le cycle de  $S^{m+2}$  tel que toute composante de  $z$  ait  $S^1$  pour projection géométrique sur le  $m+2$ -ème facteur de  $S^{m+2}$  et que toute composante de  $(g_1) \cdots (g_m) - z$  ait une projection géométrique distincte de  $S^1$  sur ce même facteur, alors  $z$  est un cycle de dimension 2, rationnel sur  $K$ , dont le support contient la droite d'équations  $X_1 = \cdots = X_{m+1} = 0$ .

Soient  $T = (t)$  un point générique de  $S^1$  et  $L$  une clôture algébrique de  $K(t)$ . Pour  $i = 1, \dots, m$ , soit  $h_i$  l'élément de  $K(t)[X_1, \dots, X_{m+1}]$  obtenu en substituant  $t$  à  $X_{m+2}$  dans  $g_i$ ; les polynômes  $h_i$  sont  $n$ -homogènes. Soit  $z(T)$  le cycle de  $S^{m+1}$  tel que  $z(T) \times T = z \cdot (S^{m+1} \times T)$ ; c'est un cycle de dimension 1, rationnel sur  $K$ , dont le support contient l'origine de  $S^{m+1}$ . Les diviseurs  $(g_1)', \dots, (g_m)'$  et  $(X_{m+2} - t)$  se coupent proprement et leur produit d'intersection est  $z(T) \times T$ ; on a  $z(T) = (h_1) \cdots (h_m)$  et  $z(T)$  est invariant par les éléments du groupe des racines  $n$ -èmes de 1. Soient  $B$  l'anneau  $L[X_1, \dots, X_{m+1}]$  muni de sa graduation canonique de type  $\mathbf{Z}(n)$  et  $\ell$  l'idéal gradué de  $B$  engendré par les polynômes  $h_i$ , alors  $z(T)$  est le cycle de dimension 1 associé au  $B$ -module gradué  $B/\ell$  et  $z(T)$  et  $B/\ell$  ont même support; cela résulte d'un usage répété de la Proposition 1 du Chapitre V, C de [39], sous sa forme locale.

Pour  $\lambda$  dans  $K$ , soit  $z(\lambda)$  le cycle de  $S^{m+1}$  tel qu'on ait  $z(\lambda) \times (\lambda) = z \cdot (S^{m+1} \times (\lambda))$ ; c'est un cycle de dimension 1, rationnel sur  $K$ , dont le support contient l'origine et on a  $z(0) = d_1 \cdots d_m \Delta$ , où  $\Delta$  est la droite de  $S^{m+1}$  d'équations  $X_1 = \cdots = X_m = 0$ . Montrons que la multiplicité de l'origine sur  $z(\lambda)$  est congrue modulo  $n$  à  $d_1 \cdots d_m$ ; il suffit de montrer que les multiplicités de l'origine sur  $z(\lambda)$  et  $z(T)$  sont congrues modulo  $n$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $S^{m+1}$  contenant l'origine et générique parmi ceux qui contiennent l'origine, la multiplicité de l'origine sur  $z(\lambda)$  est le coefficient de ce point dans  $z(\lambda) \cdot H$ ; en vertu de [45, Chapitre 8, Corollaire du Théorème 7], ce coefficient est la somme des coefficients de  $z(T) \cdot H$  en les points de ce cycle dont l'origine est une spécialisation au dessus de  $(t) \rightarrow (\lambda)$ . Il suffira donc de montrer que, si  $X$  est l'ensemble des points du support de  $z(T) \cdot H$ , distincts de l'origine et dont l'origine est une spécialisation au dessus de  $(t) \rightarrow (\lambda)$ , alors la somme des coefficients des éléments de  $X$  dans  $z(T) \cdot H$  est un

multiple de  $n$ . Soient  $p$  l'exposant caractéristique de  $K$  et  $r$  un entier étranger à  $p$  tels qu'on ait  $n = p^a r$ . Le groupe des racines  $n$ -èmes de 1 sans une clôture algébrique de  $K$  est cyclique d'ordre  $r$ ; tout élément de ce groupe laisse invariants  $z(T)$  et  $H$ , donc aussi  $z(T) \cdot H$  et  $X$ ; donc  $r$  divise la somme des coefficients des éléments de  $X$ . Lorsque  $p = 1$ , la démonstration est achevée; lorsqu'on a  $p > 1$ , le coefficient de tout élément de  $X$  dans  $z(T) \cdot H$  est un multiple de  $p^a$ , en vertu du Lemme 1, d'où le résultat dans ce cas.

Le cycle  $z(\lambda)$  est invariant par tout élément du groupe des racines  $n$ -èmes de 1; on le montre pour le support de  $z(\lambda)$ , puis pour  $z(\lambda)$ , grâce au fait que tout point du support de  $z(\lambda)$  est une spécialisation au dessus de  $(t) \rightarrow (\lambda)$  d'un point de  $z(T)$ . Le cycle  $z(1)$  est le cycle  $\Gamma$  dont on a affirmé l'existence.

**PROPOSITION 9.** *Soient  $p$  un nombre premier,  $K$  un corps dont toute extension finie a pour degré une puissance de  $p$  et  $z$  un cycle de  $S^n$ , de dimension 1, rationnel sur  $K$ , tel que l'origine appartienne au support de  $z$  et ait sur  $z$  une multiplicité étrangère à  $p$ , alors il existe un point de  $S^n$ , distinct de l'origine, défini sur  $K$ , appartenant au support de  $z$ .*

Le corps  $\bar{K}$  est infini, puisqu'un corps fini possède des extensions de tous degrés. Soit  $m$  la multiplicité de l'origine sur  $z$ , il existe un élément  $f$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , non nul, de degré  $p$ , sans terme constant, tel que  $(f)$  et  $z$  se coupent proprement, que le coefficient de l'origine dans  $(f) \cdot z$  soit  $m$  et que les cycles  $(f)'$  et  $z'$ , adhérences de  $(f)$  et  $z$  dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$ , n'aient pas de point commun à l'infini. Le degré de  $(f) \cdot z$  est le produit par  $p$  du degré de  $z$  en vertu du théorème de Bezout; le cycle  $(f) \cdot z - m(0, \dots, 0)$  est rationnel sur  $K$  et de degré étranger à  $p$ ; pour un point  $M$  du support de ce cycle, le cycle premier rationnel sur  $K$  de composante  $M$  est de degré étranger à  $p$ ; le point  $M$  est donc défini sur  $K$ .

**THÉORÈME 2.** (i) *Soit  $K$  un corps, les trois conditions suivantes sont équivalentes:  $K$  est algébriquement clos;  $dd(K) = 0$ ;  $dd_1(K) = 0$ . Supposons ces conditions satisfaites et soit  $s$  un système d'entiers, on a*

$$\phi(K, s) = \phi_1(K, s) = \text{rang}(s).$$

(ii) *Soient  $p$  un nombre premier,  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $p$  et  $K$  un corps, les quatre conditions suivantes sont équivalentes: le degré de toute extension finie de  $K$  est une puissance de  $p$ ; le degré de toute extension de  $K$ , finie et distincte de  $K$ , est un multiple de  $p$ ;  $dd_S(K) = 0$ ;  $dd_p(K) = 0$ . Supposons ces conditions satisfaites; soit  $s$  un système d'entiers dont le support est formé d'éléments étrangers à  $p$ , on a  $\phi(K, s) = \phi_p(K, s) = \text{rang}(s)$ ; tout polynôme sur  $K$ , anisotrope, non nul, de degré ou d'ordre étranger à  $p$  a une indéterminée.*

Démontrons (i). Soient  $K$  un corps algébriquement clos et  $f = (f_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_{n+1}]$ , sans terme constant; soit  $B$  l'ensemble algébrique des points  $x$  de  $S^{n-1}$  tels qu'on ait  $f_i(x) = 0$  pour tout  $i$ ; toute composante de  $B$  est de dimension  $\geq 1$ , en vertu de [45], Chapitre 4, n° 4, Théorème 7; soit  $V$  une composante de  $B$  contenant l'origine,  $V$  possède un point défini sur  $K$  et distinct de l'origine, en vertu de [45, Chapitre 4, n° 1, Proposition 3]; donc  $f$  est isotrope. Ainsi, pour un corps algébriquement clos  $K$ , on a  $\phi(K, s) = \phi_1(K, s) = \text{rang}(s)$ , pour tout système d'entiers  $s$ , et on a  $dd(K) = dd_1(K) = 0$ . Soient  $L$  un corps non algébriquement clos et  $f$  un élément non constant de  $L[X_1]$ , n'ayant pas de zéro dans  $L$ , l'homogénéisé de  $f$  par rapport à  $X_2$  est anisotrope et on a  $dd(L) > 0$ ; d'où l'équivalence des trois conditions.

Démontrons (ii). Soit  $K$  un corps dont toute extension finie a pour degré une puissance de  $p$ ; soit  $f = (f_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_{n+1}]$ , tous étant non nuls,  $p$ -homogènes et de degrés étrangers à  $p$ , la proposition 8 appliquée à  $f$  nous fournit un cycle  $\Gamma$  de  $S^{n-1}$  auquel on applique la Proposition 9, on obtient ainsi que  $f$  est isotrope; pour tout système d'entiers  $s$  dont le support est formé d'éléments étrangers à  $p$ , on a  $\phi(K, s) = \phi_p(K, s) = \text{rang}(s)$ ; on a  $dd_s(K) = dd_p(K) = 0$ ; tout polynôme sur  $K$ , anisotrope, non nul et de degré étranger à  $p$ , a une indéterminée en vertu de la Proposition 6; soit  $f$  un élément de  $K[X_1, X_2]$ , non nul et d'ordre  $d$ ,  $d$  étant un entier  $\geq 1$  et étranger à  $p$ , l'origine appartient au support du diviseur  $(f)$  et est de multiplicité  $d$  sur ce diviseur, donc  $f$  est isotrope en vertu de la Proposition 9.

Soit  $K$  un corps dont toute extension finie, distincte de lui-même, a pour degré un multiple de  $p$ ; le degré d'une extension finie et galoisienne de  $K$  est une puissance de  $p$ , puisque le corps des invariants d'un  $p$ -sous-groupe de Sylow du groupe de Galois d'une telle extension est nécessairement le corps  $K$ ; le degré d'une extension finie et séparable de  $K$  est une puissance de  $p$ ; enfin, le degré d'une extension finie de  $K$  est une puissance de  $p$ , puisque, si le corps  $K$  n'est pas parfait, il est de caractéristique  $p$ . Soit  $L$  un corps qui possède une extension finie, distincte de lui-même et de degré étranger à  $p$ ; soient  $x$ , n'appartenant pas à  $L$ , un élément d'une telle extension et  $f$  dans  $L[X_1]$  le polynôme minimal de  $x$  sur  $L$ ; le degré de  $f$  est étranger à  $p$  et l'homogénéisé de  $f$  par rapport à  $X_2$  est anisotrope; on a  $dd_s(L) > 0$ ; d'où l'équivalence des quatre conditions.

LEMME 2. Soient  $(u_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite d'entiers naturels dont aucun n'est nul,  $d$  le p.g.c.d. de cette suite et  $u$  le plus grand des  $u_i$ ; alors, pour tout multiple  $m$  de  $d$ , supérieur ou égal à  $nu^2$ , il existe des entiers naturels  $z_1, \dots, z_n$  tels que  $m = z_1 u_1 + \dots + z_n u_n$ .

On raisonne par récurrence sur  $n$ . Il existe une suite  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$  d'entiers rationnels telle qu'on ait  $m = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ ; on peut supposer  $0 \leq x_n < u_1$ ; l'entier  $m - x_n u_n$  est  $\geq (n-1)u^2$  et est un multiple du p.g.c.d. des entiers  $u_1, \dots, u_{n-1}$  et on lui applique l'hypothèse de récurrence.

LEMME 3. Soient  $E$  une partie non vide de  $\mathbf{N}$ , distincte de  $\{0\}$ , telle que toute somme de deux éléments de  $E$  appartienne à  $E$  et  $d$  le p.g.c.d. des éléments de  $E$ , alors il existe un entier  $m$  tel que tout multiple de  $d$ , qui soit  $\geq m$ , appartienne à  $E$ .

L'idéal de  $\mathbf{Z}$  engendré par  $E$  est  $(d)$ , donc  $d$  est le p.g.c.d. d'une suite finie d'éléments de  $E$ , à laquelle on applique le lemme précédent.

PROPOSITION 10. (i) Soient  $K$  un corps et  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  tels qu'on ait  $dd_S(K) = 0$  (resp.  $n \geq 1$  un entier tels qu'on ait  $dd_n(K) = 0$ ); alors, si  $K$  n'est pas algébriquement clos, il existe un nombre premier  $p$  et un seul tel qu'on ait  $dd_{S(p)}(K) = dd_p(K) = 0$ ,  $S(p)$  étant l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $p$ , et, de plus,  $S$  est contenu dans  $S(p)$  (resp.  $p$  divise  $n$ ).

(ii) Soient  $K$  un corps,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  telle que  $dd_S(K) = 0$  (resp.  $n \geq 1$  un entier tel que  $dd_n(K) = 0$ ) et  $s$  un système d'entiers dont le support est contenu dans  $S$  (resp. est formé d'entiers étrangers à  $n$ ), on a  $\phi(K, s) = \text{rang}(s)$  (resp.  $\phi_n(K, s) = \text{rang}(s)$ ).

L'affirmation (ii) est une conséquence de (i) et du Théorème 2. Démontrons (i). Pour un entier  $n \geq 1$ , nous noterons  $S(n)$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $n$ .

Soient  $K$  un corps non algébriquement clos tel que  $dd_S(K) = 0$  et  $E$  l'ensemble des entiers  $x \geq 1$  tels qu'on ait  $\phi(K, x) > 1$ ; alors  $E$  n'est pas vide et la somme de deux éléments de  $E$  appartient à  $E$ . Soit  $d$  le p.g.c.d. des éléments de  $E$ ; il existe des entiers aussi grands qu'on veut qui n'appartiennent pas à  $E$ , à savoir les éléments de  $S$ ; donc, en vertu du Lemme 3, on a  $d \neq 1$ . Soit  $q$  un diviseur premier de  $d$ ,  $q$  divise tout élément de  $E$ , donc on a  $dd_{S(q)}(K) = 0$ ; en vertu du Théorème 2, on a  $dd_q(K) = 0$  et toute extension finie de  $K$  a pour degré une puissance de  $q$ . Il en résulte que  $d$  est une puissance d'un nombre premier  $p$  et qu'on a  $dd_{S(p)}(K) = dd_p(K) = 0$ . Soit  $s$  appartenant à  $S$ , aucune puissance de  $s$  n'appartient à  $E$ ; donc, en vertu du Lemme 3,  $s$  est étranger à  $p$ .

Soit  $K$  un corps non algébriquement clos tel que  $dd_n(K) = 0$ ; on a  $dd_{S(n)}(K) = 0$ ; donc il existe un nombre premier  $p$  et un seul tel que  $dd_{S(p)}(K) = dd_p(K) = 0$ ; on a  $S(n) \subset S(p)$  et  $p$  divise  $n$ .

Remarque. Il n'existe pas de corps  $K$  tel qu'on ait  $0 < dd(K) < 1$  (resp.  $0 < dd_1(K) < 1$ ); en effet, soit  $K$  un corps tel que  $dd(K) > 0$  (resp.

$dd_1(K) > 0$ ); alors, en vertu du Théorème 2,  $K$  possède une extension finie  $L$ , distincte de lui-même; tout polynôme norme de  $L$  sur  $K$  est anisotrope, d'où  $dd(K) \geq 1$  et  $dd_1(K) \geq 1$ . Soient  $p$  un nombre premier et  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $p$ , il n'existe pas de corps  $K$  tel qu'on ait  $0 < dd_S(K) < 1$  (resp.  $0 < dd_p(K) < 1$ ); en effet, soit  $K$  un corps tel que  $dd_S(K) > 0$  (resp.  $dd_p(K) > 0$ ); alors, en vertu du Théorème 2,  $K$  possède une extension finie  $L$ , distincte de lui-même, de degré étranger à  $p$ ; tout polynôme norme de  $L$  sur  $K$  est anisotrope, d'où  $dd_S(K) \geq 1$  et  $dd_p(K) \geq 1$ .

### 5. Changement d'anneau

Soient  $S$  une partie multiplicative de  $A$  ne contenant pas zéro,  $f$  une famille finie et anisotrope de polynômes sur  $S^{-1}A$  et  $\sigma$  un élément de  $S$  tel que  $\sigma f$  ait ses coefficients dans  $A$ , alors  $\sigma f$ , considérée comme une famille de polynômes sur  $A$ , est anisotrope; donc, si  $n \geq 1$  est un entier et  $t$  un système d'entiers, on a  $\phi_n(S^{-1}A, t) \leq \phi_n(A, t)$  et  $dd_n(S^{-1}A) \leq dd_n(A)$ .

Soient  $I$  un ensemble ordonné filtrant à droite,  $(A_i)_{i \in I}$  une famille croissante de sous-corps du corps  $A$  (resp. une famille croissante de sous-anneaux de l'anneau  $A$ ) telle que  $A$  soit la réunion des  $A_i$  et  $f$  une famille finie de polynômes sur  $A$ ; pour que  $f$  soit anisotrope, il faut et il suffit que, pour tout  $i$  dans  $I$ , tel que les éléments de  $f$  aient leurs coefficients dans  $A_i$ ,  $f$  soit anisotrope en tant que famille de polynômes sur  $A_i$ ; donc, si  $n \geq 1$  est un entier et  $s$  un système d'entiers, on a

$$\phi(A, s) \leq \limsup \phi(A_i, s) \text{ (resp. } \phi_n(A, s) \leq \limsup \phi_n(A_i, s) \text{);}$$

on en déduit que, si  $T$  est une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ , on a

$$dd_T(A) \leq \limsup dd_T(A_i) \text{ (resp. } dd_n(A) \leq \limsup dd_n(A_i) \text{).$$

**THÉORÈME 3.** (i) Soient  $A$  un corps,  $B$  une extension finie de  $A$  et  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ , on a  $dd_S(B) \leq dd_S(A)$ .

(ii) Soient  $n \geq 1$  un entier,  $A$  un anneau intègre,  $B$  un anneau intègre contenant  $A$ , libre et de rang fini comme  $A$ -module, et supposons que  $A$  vérifie l'une des deux conditions suivantes:  $A$  est un corps;  $dd_n(A) > 0$ . Alors on a  $dd_n(B) \leq dd_n(A)$ .

Démontrons (i) (resp. (ii)). Soient  $(b_k)_{k \in K}$  une base du  $A$ -module  $B$  et  $\alpha$  le nombre  $dd_S(A)$  (resp.  $dd_n(A)$ ). On peut supposer que  $\alpha$  est fini. Soit  $f$  un élément de  $B[X_l]_{l \in L}$ , non nul, anisotrope, homogène (resp.  $n$ -homogène), de degré  $d$ , avec  $d$  dans  $S$  (resp.  $d$  étranger à  $n$ ). Soient  $u = (u_l)_{l \in L}$  la famille d'éléments de  $B[X_l]_{l \in K \cup L}$  telle qu'on ait  $u_l = \sum_{k \in K} X_{(k,l)} b_k$ , pour tout  $l$  dans  $L$ , et  $g = (g_k)_{k \in K}$  la famille d'éléments de  $A[X_l]_{l \in K \cup L}$  telle qu'on ait  $f(u) = \sum_{k \in K} g_k b_k$ . Alors  $g$  est anisotrope et a tous ses éléments homogènes

et de degré  $d$  (resp.  $n$ -homogènes, de degré  $\leq d$  et de degré congru à  $d$  modulo  $n$ ). Soient  $\kappa$  le cardinal de  $K$  et  $\lambda$  le cardinal de  $L$ , il résulte du Théorème 1 et de la Proposition 10, (ii) (resp. du Théorème 1, de la Proposition 10, (ii) et de la Proposition 5) qu'on a  $\kappa\lambda \leq \kappa d^\alpha$ ; donc on a  $\lambda \leq d^\alpha$ .

COROLLAIRE. (i) Soient  $K$  un corps,  $L$  une extension algébrique de  $K$ ,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$  et  $n \geq 1$  un entier, on a  $dd_S(L) \leq dd_S(K)$  et  $dd_n(L) \leq dd_n(K)$ .

(ii) Soient  $n \geq 1$  un entier,  $A$  un anneau intègre et  $B$  un anneau intègre contenant  $A$ . Supposons qu'on ait  $dd_n(A) > 0$  et que toute partie finie de  $B$  soit contenue dans un sous-anneau de  $B$  contenant  $A$  et qui soit un  $A$ -module libre de rang fini, alors on a  $dd_n(B) \leq dd_n(A)$ .

PROPOSITION 11. Soient  $K$  un corps et  $h$  l'homomorphisme canonique de  $K$  dans  $K(X)$ . Soit  $f$  un élément de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , non nul, de degré  $d$ , homogène et anisotrope, le polynôme  $\sum_{i=0}^{d-1} X^i h(f)(X_{in+1}, \dots, X_{in+n})$  de  $K(X)[X_1, \dots, X_n]$  est non nul, de degré  $d$ , homogène et anisotrope. Pour tout entier  $x \geq 1$ , on a  $\phi(K(X), x) \geq x\phi(K, x)$ .

Soit  $g$  le polynôme considéré, nous raisonnerons par l'absurde en supposant  $g$  isotrope. Alors  $g$  possède un zéro non banal  $z$  dans  $K[X]$  et on peut supposer que l'une des coordonnées de  $z$  n'est pas divisible par  $X$ . Soit  $l$  le plus grand entier tel que les éléments de  $z$  d'indice  $\leq ln$  soient multiples de  $X$ ; alors,  $X^l h(f)(z_{ln+1}, \dots, z_{ln+n})$  est un multiple de  $X^{l+1}$  et  $h(f)(z_{ln+1}, \dots, z_{ln+n})$  est un multiple de  $X$ . Si, pour  $y$  dans  $K[X]$ , on note  $y'$  le terme constant de  $y$ , on a  $f(z'_{ln+1}, \dots, z'_{ln+n}) = 0$ , ce qui est absurde.

THÉORÈME 4. (i) Soient  $A$  un corps et  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ , on a  $dd_S(A(X)) = dd_S(A) + 1$ .

(ii) Soient  $n \geq 1$  un entier et  $A$  un anneau intègre satisfaisant l'une des deux conditions suivantes:  $A$  est un corps;  $dd_n(A) > 0$ . Alors, on a

$$dd_n(A[X]) \leq dd_n(A) + 1.$$

Sous les hypothèses de (i), on a, en vertu de la proposition précédente,  $dd_S(A(X)) \geq dd_S(A) + 1$ . Il reste donc à montrer que, sous les hypothèses de (i) (resp. (ii)), on a

$$dd_S(A(X)) \leq dd_S(A) + 1 \text{ (resp. } dd_n(A[X]) \leq dd_n(A) + 1).$$

Soient  $B = A[X]$  et  $\alpha = dd_S(A)$  (resp.  $\alpha = dd_n(A)$ ). On peut supposer que  $\alpha$  est fini. Soient  $d$  un élément de  $S$  (resp. un entier  $\geq 1$  et étranger à  $n$ ),  $f$  un élément de  $B[X_i]_{i \in I}$ , non nul, de degré  $d$ , anisotrope, homogène (resp.

$n$ -homogène) et  $p$  le degré de  $f$  comme polynôme en  $X$  à coefficients dans  $A[X_i]_{i \in I}$ . Soient  $\kappa$  un entier,  $K$  l'intervalle  $[0, \dots, \kappa]$  de  $\mathbf{N}$  et  $u = (u_i)_{i \in I}$  la famille d'éléments de  $B[X_i]_{i \in I \times K}$  telle que, pour  $i$  dans  $I$ , on ait

$$u_i = \sum_{k \in K} X^k X_{(i, k)},$$

alors  $f(u)$  est un élément homogène (resp.  $n$ -homogène) de  $B[X_i]_{i \in I \times K}$  dont le degré par rapport à  $X$  est  $\leq \kappa d + p$ . Soit  $g = (g_m)_{m=0, \dots, \kappa d + p}$  la suite d'éléments de  $A[X_i]_{i \in I \times K}$  telle qu'on ait  $f(u) = \sum_{m=0}^{\kappa d + p} X^m g_m$ , alors  $g$  est anisotrope et chacun des  $g_m$  est homogène de degré  $d$  (resp.  $n$ -homogène, de degré  $\leq d$  et de degré congru à  $d$  modulo  $n$ ). Soit  $\iota$  le cardinal de  $I$ , il résulte du Théorème 1 et de la Proposition 10, (ii) (resp. du Théorème 1, de la Proposition 10, (ii) et de la Proposition 5) qu'on a  $\iota(\kappa + 1) \leq (\kappa d + p + 1) d^\alpha$ . Donc on a  $\iota(\kappa - d^{\alpha+1}) \leq (p + 1) d^\alpha - \iota$ ; cette inégalité étant satisfaite par tout entier  $\kappa$ , on a  $\iota \leq d^{\alpha+1}$ .

**COROLLAIRE 1.** Soient  $K$  un corps et  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ . Supposons que  $dd_S(K)$  soit un entier  $n$  et que, pour tout  $s$  dans  $S$ , on ait  $\phi(K, s) = s^n$ , alors on a  $\phi(K(X), t) = t^{n+1}$ , pour tout  $t$  dans  $S$ .

C'est une conséquence du théorème, compte tenu de la Proposition 11.

**COROLLAIRE 2.** Soient  $K$  un corps,  $n \geq 1$  un entier et  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $n$ . Supposons qu'on ait  $dd_n(K) = dd_S(K)$ , alors on a  $dd_n(K[X]) = dd_n(K(X)) = dd_n(K) + 1$ .

**COROLLAIRE 3.** Soient  $A$  un anneau intègre,  $n \geq 1$  un entier et  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $n$ . Supposons qu'on ait  $dd_n(A) = dd_S(K) > 0$ , alors on a  $dd_n(A[X]) = dd_n(A) + 1$ .

**PROPOSITION 12.** Soit  $A$  un corps (resp. un anneau intègre). Soient  $h$  l'injection canonique de  $A$  dans  $A(X)$  (resp.  $A[X]$ ) et  $f$  une famille finie et anisotrope de polynômes sur  $A$ ; alors, si  $A$  est infini,  $h(f)$  est anisotrope. Soient  $n \geq 1$  un entier et  $s$  un système d'entiers, on a  $\phi(A(X), s) \geq \phi(A, s)$ ,  $\phi_n(A(X), s) \geq \phi_n(A, s)$  et  $dd_n(A(X)) \geq dd_n(A)$  (resp.  $\phi_n(A[X], s) \geq \phi_n(A, s)$  et  $dd_n(A[X]) \geq dd_n(A)$ ).

Raisonnons par l'absurde, en supposant  $h(f)$  isotrope. Soit  $x = (x_i)_{i \in I}$  un zéro non banal de  $f$  dans  $A(X)$  (resp.  $A[X]$ ); en vertu de la Proposition 3 de la Section I, il existe un élément  $a$  de  $A$ , substituable dans chacun des  $x_i$  et tel que  $x(a) \neq 0$ ; on a  $f(x(a)) = 0$ , ce qui est absurde. Lorsque  $A$  est infini, la seconde partie de la proposition résulte de la première. Lorsque  $A$  est fini,  $A$  est un corps fini, alors, si  $d = (d_i)_{i=1, \dots, r}$  est une suite d'entiers,

dont aucun n'est nul, le Corollaire 1 du Théorème 4 et la Proposition 7 nous donnent  $\phi(A(X), d) = d_1^2 + \dots + d_r^2$ ; le Théorème 4 et la Proposition 7 nous donnent  $\phi_n(A[X], d) = d_1^2 + \dots + d_r^2$ ; d'où le résultat, dans ce cas.

*Remarque 1.* Soient  $i$  l'injection canonique de  $\mathbf{F}_2$  dans  $\mathbf{F}_2[X]$  et  $f$  le polynôme  $X_1^2 + X_1X_2 + X_2^3$  de  $\mathbf{F}_2[X_1, X_2]$ ; alors,  $f$  est anisotrope et  $i(f)$  est isotrope, puisqu'on a  $f(X^3 + X^2, X^2 + X) = 0$ .

**PROPOSITION 13.** Soient  $n \geq 1$  un entier,  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ ,  $k$  un corps,  $K$  un surcorps de  $k$  dont le degré de transcendance sur  $k$  est fini et  $p$  ce degré, alors on a  $dd_S(K) \leq dd_S(k) - p$  et  $dd_n(K) \leq dd_n(k) + p$ .

C'est une conséquence du Théorème 4 et du corollaire du Théorème 3.

*Remarque 2.* Soient  $S$  une partie multiplicative de  $\mathbf{N}$ ,  $K$  un corps,  $L$  une extension de type fini de  $K$  et  $p$  le degré de transcendance de  $L$  sur  $K$ ; supposons que, pour toute extension finie  $E$  de  $K$ , on ait  $dd_S(E) = dd_S(K)$ , alors on a  $dd_S(L) = dd_S(K) + p$ ; le lecteur en trouvera une démonstration dans [36], pages 36 à 38.

## 6. Polynômes anisotropes maximaux

**DÉFINITION 4.** Soient  $A$  un corps (resp. un anneau intègre),  $n \geq 1$  un entier et  $f$  une famille finie de polynômes sur  $A$ , on dit que  $f$  est anisotrope maximale (resp. anisotrope  $n$ -maximale), si les quatre conditions suivantes sont satisfaites:  $f$  est anisotrope;  $f$  est homogène (resp.  $n$ -homogène); tout élément de  $f$  est non nul; si  $s$  est le système d'entiers associé au degré de  $f$ , le nombre des indéterminées de  $f$  est  $\phi(A, s)$  (resp.  $\phi_n(A, s)$ ).

Soit  $f$  un polynôme, on dit que  $f$  est anisotrope maximal (resp. anisotrope  $n$ -maximal), si la famille  $(f)_{\{f\}}$  est anisotrope maximale (resp. anisotrope  $n$ -maximale).

**PROPOSITION 14.** Soit  $K$  un corps, toute famille de polynômes sur  $K$ , dont la composante homogène de plus haut degré est anisotrope maximale, possède un zéro dans  $K$ .

Soient  $f$  une telle famille d'éléments de  $K[X_i]_{i \in I}$ ,  $F$  la composante homogène de plus haut degré de  $f$ ,  $j$  un objet n'appartenant pas à  $I$ ,  $h$  l'homogénéisé de  $f$  par rapport à  $X_j$  et  $x = (x_k)_{k \in I \cup \{j\}}$  un zéro non banal de  $h$  dans  $K$ . L'élément  $x_j$  est non nul; car si  $x_j$  est nul et si  $y$  est la restriction de  $x$  à  $I$ , on a  $F(y) = 0$ ; d'où  $y = 0$  et  $x = 0$ , ce qui est absurde. La restriction à  $I$  de  $x_j^{-1}x$  est un zéro de  $f$  dans  $K$ .

**COROLLAIRE.** Soient  $K$  un corps et  $f$  une famille finie anisotrope maximale de polynômes sur  $K$ , la fonction polynôme définie par  $f$  et par  $K$  est surjective.

PROPOSITION 15. Soient  $K$  un corps fini et  $f = (f_i)_{i \in I}$  et  $g = (g_i)_{i \in I}$  deux familles finies d'éléments d'une même algèbre de polynômes sur  $K$ ; supposons que  $f$  soit anisotrope 1-maximale, de degré  $(d_i)_{i \in I}$ , et que, pour tout  $i$ ,  $g_i$  soit de degré  $\leq d_i - 1$ , alors  $f + g$  possède un zéro dans  $K$ .

Cela résulte de l'application à  $f$  et à  $f + g$  du Corollaire 1 du Théorème 1 de la Section I.

COROLLAIRE. Soient  $K$  un corps fini et  $f$  une famille finie et anisotrope 1-maximale de polynômes sur  $K$ , alors la fonction polynôme définie par  $f$  et par  $K$  est surjective.

Remarque. Soient  $K$  un corps algébriquement clos et  $f = (f_i)_{i=1,2}$  la suite d'éléments de  $K[X_1, X_2]$  définie par  $f_1 = X_1$  et  $f_2 = X_1 X_2 - X_2$ ; alors  $f$  est anisotrope 1-maximale et la fonction polynôme définie par  $f$  et par  $K$  ne prend pas la valeur  $(1, 1)$ .

## 7. Relations avec le groupe de Brauer

Pour un corps  $k$ , on note  $G_k$  le groupe de Galois relatif à  $k$  d'une clôture séparable de  $k$ . Soient  $G$  un groupe profini et  $p$  un nombre premier, on note  $cd(G)$  la dimension cohomologique de  $G$  et  $cd_p(G)$  la  $p$ -dimension cohomologique de  $G$ .

Soit  $k$  un corps, les conditions suivantes sont équivalentes:  $dd(k) = 0$ ;  $cd(G_k) = 0$  et  $k$  est parfait. De plus, si  $p$  est un nombre premier et  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $p$ , les conditions suivantes sont équivalentes:  $dd_S(k) = 0$ ; pour tout nombre premier  $q \neq p$ , on a  $cd_q(G_k) = 0$  et  $k$  est ou bien parfait ou bien de caractéristique  $p$ .

PROPOSITION 16. Un corps  $K$  tel que  $dd(K) < 2$ , a un groupe de Brauer nul. Soient  $p$  un nombre premier et  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $p$ , le groupe de Brauer d'un corps  $K$  tel que  $dd_S(K) < 2$ , est un  $p$ -groupe.

La première affirmation résulte de la seconde. Soit  $K$  un corps tel que  $dd_S(K) < 2$ , il suffit de montrer que l'ordre de tout élément non nul du groupe de Brauer de  $K$  est un multiple de  $p$ . Soient  $\alpha$  un élément non nul du groupe de Brauer de  $K$  et  $D$  un corps non commutatif, de centre  $K$ , de rang fini  $n^2$  sur  $K$ , n'étant un entier naturel, et de classe  $\alpha$ ; un polynôme norme réduite de  $D$  sur  $K$  est anisotrope, homogène, de degré  $n$  et possède  $n^2$  indéterminées; donc  $n$  n'appartient pas à  $S$  et  $p$  divise  $n$ ; donc, en vertu de [19, p. 59, Satz 2],  $p$  divise l'ordre de  $\alpha$ .

COROLLAIRE. Soit  $K$  un corps tel que  $dd(K) < 2$ , alors le groupe de Brauer de toute extension algébrique de  $K$  est nul et on a  $cd(G_K) \leq 1$ . Soient  $p$  un

nombre premier,  $S$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$  et étrangers à  $p$  et  $K$  un corps tel que  $dd_S(K) < 2$ , alors le groupe de Brauer de toute extension algébrique de  $K$  est un  $p$ -groupe et, pour tout nombre premier  $q \neq p$ , on a  $cd_q(G_K) \leq 1$ .

L'affirmation sur la dimension cohomologique résulte de celle concernant les groupes de Brauer, en vertu des Propositions 3 et 4 du Chapitre 2 de [38].

*Remarque.* J. Ax a construit dans [4], un corps  $K$  ayant les trois propriétés suivantes:  $K$  est de caractéristique zéro;  $dd(K) = +\infty$ ; le groupe de Galois relatif à  $K$  d'une clôture algébrique de  $K$  est isomorphe au complété  $\hat{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}$  pour la topologie des sous-groupes d'indice fini; pour un tel corps, on a  $cd(G_K) = cd(\hat{\mathbf{Z}}) = 1$ , en vertu de [37, Chapitre 13, §1, Prop. 2].

### III. DIVERS

#### 1. Corps ordonnés maximaux

**THÉORÈME 1.** Soient  $K$  un corps ordonné maximal et  $I$  l'ensemble des entiers naturels impairs. On a  $dd_1(K) = dd_2(K) = 0$ . Pour tout système d'entiers  $s$ , on a  $\phi(K, s) = \phi_2(K, s)$  et cette valeur commune est  $\text{rang}(s)$ , si le support de  $s$  est contenu dans  $I$ , et  $+\infty$  sinon. Pour tout système d'entiers  $s$  qui n'est ni de la forme  $(n)$ ,  $n$  étant impair, ni de la forme  $m(1)$ , on a  $\phi_1(K, s) = +\infty$ . Tout polynôme sur  $K$ , non nul, anisotrope et dont le degré ou l'ordre est impair a une indéterminée.

Soit  $d \geq 2$  un entier pair, le polynôme  $X_1^d + \dots + X_n^d$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$  est anisotrope; on a donc  $\phi(K, d) = +\infty$  et on a  $\phi(K, s) = +\infty$ , pour tout système d'entiers  $s$  dont le support contient un entier pair. Soient  $r \geq 2$  un entier,  $d = (d_i)_{i=1, \dots, r}$  une suite croissante d'entiers telle qu'on ait  $d_r \geq 2$  et  $e$  un entier pair tel que  $2 \leq e \leq d_r$ , alors la suite  $(f_i)_{i=1, \dots, r}$  d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_n]$  définie par  $f_i = X_1^{d_i}$ , pour  $i = 1, \dots, r-1$ , et par  $f_r = X_1^d + X_2^e + \dots + X_n^e$  est anisotrope; donc on a  $\phi_1(K, \bar{d}) = +\infty$ . Les autres affirmations sont des conséquences du Théorème 2, (ii) de la Section II.

Soient  $K$  un corps ordonné et  $f$  un élément de  $K[X_i]_{i \in I}$ , on dit que  $f$  est positif (resp. négatif), si, pour tout  $x$  dans  $K^I$ , on a  $f(x) \geq 0$  (resp.  $f(x) \leq 0$ ).

**PROPOSITION 1.** Soit  $K$  un corps ordonné maximal, tout polynôme sur  $K$ , dont le nombre des indéterminées est fini et  $\geq 2$  et dont l'ensemble des zéros dans  $K$  est fini, est positif ou négatif.

Soit  $f$  un tel polynôme appartenant à  $K[X_i]_{i \in I}$ . Soient  $a$  et  $b$  des éléments de  $K^I$  tels que la droite  $ab$  de l'espace affine  $K^I$  ne contienne aucun zéro de

$f$  et  $g$  le polynôme  $f(a + X(b - a))$  de  $K[X]$ , alors  $g$  n'a pas de zéro dans  $K$ ; donc,  $g$  est positif ou négatif, en vertu de Bourbaki, *Alg.*, Chap. 6, §2, Prop. 5; donc on a  $f(a)f(b) = g(0)g(1) > 0$ . Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $K^I$  qui ne sont pas zéros de  $f$ , il existe un élément  $w$  de  $K^I$  tel que les droites  $uw$  et  $vw$  de  $K^I$  ne contiennent aucun zéro de  $f$ ; on a  $f(u)f(w) > 0$  et  $f(v)f(w) > 0$ , d'après ce qui précède; donc on a  $f(u)f(v) > 0$ .

*Remarque.* Soient  $K$  un corps ordonné maximal,  $f = (f_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite d'éléments de  $K[X_1, \dots, X_{n+1}]$  telle que chacun des  $f_i$  ait ses composantes homogènes de degré pair nulles,  $g$  un élément de  $K[X_1, \dots, X_{n+1}]$ , anisotrope, homogène et positif et  $a$  un élément positif de  $K$ , alors il existe un élément  $x$  de  $K^{n+1}$  tel qu'on ait  $f(x) = 0$  et  $g(x) = a$ .

En voici une esquisse de démonstration: on peut supposer que  $K$  est le corps des nombres réels, puisqu'en vertu de [26, Chapitre 4, V], l'ensemble des axiomes des corps ordonnés maximaux est saturé pour le langage des corps ordonnés; on démontre, à l'aide de la Proposition 8 de la Section II, l'existence d'une courbe algébrique  $C$  de l'espace affine  $S^{n+1}$ , définie sur  $\mathbf{R}$ , contenant l'origine de  $S^{n+1}$ , symétrique par rapport à l'origine, de degré impair et telle que, pour tout  $i$  tel que  $f_i$  soit non nul, le support de  $C$  soit contenu dans le support du diviseur  $(f_i)$ ; soient  $C'$  l'ensemble des points de  $C$  qui appartiennent à  $\mathbf{R}^{n+1}$  et  $D$  la composante connexe de l'origine dans  $C'$  lorsque  $C'$  est muni de la topologie induite de celle de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , on montre que  $D$  est fermé et n'est pas compact; l'ensemble des nombres réels de la forme  $g(x) - a$ , pour  $x$  appartenant à  $D$  est connexe, contient  $-a \leq 0$  et contient des nombres réels  $> 0$ , puisque  $g(x)$  tend vers  $+\infty$ , lorsque  $x$  appartenant à  $\mathbf{R}^{n+1}$  tend vers l'infini; donc il existe  $z$  appartenant à  $D$  tel que  $g(z) = a$ .

Soient  $K$  un corps ordonné maximal,  $f$  le polynôme  $X_2^3(1 - X_1^2) - X_1$  et  $g$  le polynôme  $X_2^2(1 - X_1^2)^2 + X_1^2$  de  $K[X_1, X_2]$ ; on voit que  $f$  a ses composantes homogènes de degré pair nulles, que  $g$  est anisotrope et positif; néanmoins, au contraire de ce qui aurait lieu si  $g$  était homogène, il n'existe pas d'élément  $z$  de  $K^2$  tel qu'on ait  $f(z) = 0$  et  $g(z) = 1$ . En effet, si  $(x_1, x_2)$  appartenant à  $K^2$  a cette propriété, on a  $x_1^2 \neq 1$ ; d'où  $x_2^3 = x_1(1 - x_1^2)^{-1}$  et  $x_2^2 = (1 - x_1^2)^{-1}$ ; d'où  $x_1^4 - x_1^2 + 1 = 0$ ; ce qui est absurde.

## 2. Comparaison de $\phi$ et de $\phi_1$

Voici un exemple de corps  $K$  et d'entier  $d$  tels qu'on ait  $\phi_1(K, d) > \phi(K, d)$ : soit  $L$  un corps ordonné maximal, on a  $\phi(L(X), 9) = 9$ , en vertu du Théorème 1 du paragraphe précédent et du Corollaire 1 du Théorème 4 de la Section II et on a  $\phi_1(L(X), 9) = +\infty$ , puisque, pour tout entier  $n \geq 2$ , le polynôme  $X_1^9 - X(X_1^2 + \dots + X_n^2)^3$  de  $L(X)[X_1, \dots, X_n]$  est anisotrope. On peut construire des exemples semblables avec des corps de la forme  $E(X)$ , où  $E$  est un corps de dimension zéro.

PROPOSITION 2. *Si, sur un corps  $K$ , on a un polynôme non nul, anisotrope, d'ordre  $d$  et de degré  $d + 1$ , alors  $K$  est un corps fini dont le nombre des éléments est  $\leq 2d$ .*

Soient  $f$  appartenant à  $K[X_i]_{i \in I}$  un tel polynôme et  $f_d$  et  $f_{d+1}$  les composantes homogènes de  $f$  de degrés  $d$  et  $d + 1$ . La fonction polynôme définie par  $f_d f_{d+1}$  et par  $K$  est nulle, car, s'il existe un  $x$  de  $K^I$  tel qu'on ait  $(f_d f_{d+1})(x) \neq 0$ , alors,  $-f_d(x) f_{d+1}(x)^{-1} x$  est un zéro non banal de  $f$  dans  $K$ . Les coefficients des monômes de  $f_d f_{d+1}$  de la forme  $X_i^{2d+1}$  sont nuls; le degré de  $f_d f_{d+1}$  par rapport à chacune de ses indéterminées est  $\leq 2d$ ; la Proposition 3 de la Section I montre que  $K$  est fini et le Corollaire 1 de cette proposition permet de conclure.

PROPOSITION 3. *Soit  $K$  un corps, on a*

$$\phi_1(K, 2) = \phi(K, 2) \quad \text{et} \quad \phi_1(K, 3) \leq \sup(\phi(K, 3), \phi(K, 2) + 1).$$

Ces relations sont satisfaites quand  $K$  est fini, en vertu de la Proposition 3 de la Section II et nous supposons que  $K$  est infini. L'égalité de  $\phi_1(K, 2)$  et de  $\phi(K, 2)$  est conséquence de la Proposition 2. Soient  $f$  un élément de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , non nul, anisotrope et de degré 3 et  $f_1, f_2, f_3$  ses composantes homogènes de degrés 1, 2, 3. Si  $f_1$  est nul,  $f_2$  est nul en vertu de la Proposition 2 et on a  $n \leq \phi(K, 3)$ . Nous pouvons donc supposer qu'on a  $f_1 = X_1$ . Le polynôme  $X_1$  divise  $f_2 f_3$ ; sinon, le polynôme anisotrope obtenu en annulant  $X_1$  dans  $f$ , a 2 et 3 pour degrés de ses composantes homogènes non nulles, ce qui est absurde, vu la Proposition 2. Supposons que  $X_1$  divise  $f_3$ , alors le polynôme anisotrope obtenu en annulant  $X_1$  dans  $f$  est homogène et de degré 2, donc on a  $n - 1 \leq \phi(K, 2)$ . Supposons que  $X_1$  divise  $f_2$  et soient  $g$  le polynôme anisotrope obtenu en annulant  $X_1$  dans  $f$  et  $h$  l'élément de  $K[X_2, \dots, X_n]$  obtenu en substituant 1 à  $X_1$  dans  $f$ ;  $h$  n'a pas de zéro dans  $K$  et  $g$  pour composante homogène de degré 3; donc, en vertu de la Proposition 14 de la Section II, on a  $n - 1 < \phi(K, 3)$ .

*Remarque.* Soit  $K$  un corps, on a

$$\log_3 \phi_1(K, 3) \leq \sup(\log_2 \phi(K, 2), \log_3 \phi(K, 3))$$

et, par suite,  $\log_3 \phi_1(K, 3) \leq dd(K)$ . En effet, si  $\phi(K, 3) = 1$ , le corps  $K$  est infini et on a  $\phi_1(K, 3) = 1$ , en vertu de la Proposition 6 de la Section II; d'où l'inégalité dans ce cas. Nous pouvons supposer qu'on a  $\phi(K, 3) \geq 2$ . Si l'on a  $\phi(K, 2) = 1$ , on a  $\phi_1(K, 3) \leq \phi(K, 3)$  en vertu de la Proposition 3; d'où l'inégalité. Si l'on a  $\phi(K, 2) \geq 2$ , l'inégalité résulte de la Proposition 3 et du fait que, pour tout nombre réel  $x \geq 2$ , on a  $\log_3(x + 1) \leq \log_2 x$ .

### 3. Questions

La partie (i) du Théorème 1 de la Section II peut-elle être généralisée de la façon suivante: pour tout corps  $K$  tel que  $\alpha = dd(K)$  soit fini et pour toute suite  $d = (d_i)_{i=1, \dots, r}$  d'entiers naturels non nuls, on a

$$\phi(K, \bar{d}) \leq d_1^\alpha + \dots + d_r^\alpha?$$

Un anneau intègre de 1-dimension diophantienne zéro a un corps des fractions algébriquement clos; existe-t-il de tels anneaux qui ne soient pas des corps? S'il y en a, peut-on étendre à ces anneaux les Théorèmes 1, 2, 3 et 4 de la Section II?

### BIBLIOGRAPHIE

1. E. ARTIN, "The Collected Papers," pp. x, 532 et 533, Addison-Wesley, Reading, Mass., U.S.A., 1965.
2. J. AX, Zeroes of polynomials over finite fields, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 255-261.
3. J. AX, The undecidability of power series fields, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 846.
4. J. AX, Proof of some conjectures on cohomological dimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 1214-1221.
5. J. AX, Solving diophantine problems modulo every prime, *Ann. of Math.* **85** (1967), 161-183.
6. J. AX, The elementary theory of finite fields, *Ann. of Math.* **88** (1968), 239-271.
7. J. AX AND S. KOCHEN, Diophantine problems over local fields. I, II, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 605-648; III, *Ann. of Math.* **83** (1966), 437-456.
8. B. J. BIRCH, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* **4** (1957), 102-105.
9. B. J. BIRCH, Forms in many variables, *Proc. Roy. Soc., Ser. A* **265** (1962), 245-263.
10. B. J. BIRCH AND D. J. LEWIS, p-adic forms, *J. Indian Math. Soc.* **23** (1959), 11-32.
11. B. J. BIRCH AND D. J. LEWIS, On p-adic forms, *Mich. Math. J.* **9** (1962), 53-57.
12. B. J. BIRCH AND D. J. LEWIS, Systems of three quadratic forms, *Acta Arithmetica* **10** (1964/65), 423-442.
13. B. J. BIRCH, D. J. LEWIS, AND T. G. MURPHY, Simultaneous quadratic forms, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 110-115.
14. R. BRAUER, A note on systems of homogeneous algebraic equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 749-755.
15. J. BROWKIN, On forms over p-adic fields, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.* **14** (1966), 489-492.
16. C. CHEVALLEY, Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **11** (1936), 73-75.
17. H. DAVENPORT, Cubic forms in sixteen variables, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **272** (1963), 285-303.
18. V. B. DEMYANOV, On cubic forms in discretely normed fields, *Dokl. Akad. Nauk. U.R.S.S.* **74** (1950), 889-891 (en russe).
19. M. DEURING, "Algebren," Zweite Auflage, *Ergebn. der Math.* Band 41, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

20. J. M. GREENBERG, Rational points in henselian discrete valuation rings, *Publ. Inst. Hautes. Et. Sci.* **31** (1966), 59–64.
21. J. M. GREENBERG, "Lectures on Forms in Many Variables," Benjamin, New York, 1969.
22. N. GREENLEAF, Irreducible subvarieties and rational points, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 25–31.
23. H. HASSE, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. Reine Angew. Math.* **153** (1924), 113–130.
24. I. KAPLANSKY, Quadratic forms, *J. Math. Soc. Japan* **5** (1953), 200–207.
25. S. KOCHEN, Integer-Valued Rational Functions over the  $p$ -adic Numbers, Proc. Symp. in Pure Math. XII Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1969.
26. G. KREISEL AND J. L. KRIVINE, "Éléments de Logique Mathématique," Dunod, Paris, 1967.
27. S. LANG, On quasi algebraic closure, *Ann. of Math.* **55** (1952), 373–390.
28. S. LANG, The theory of real places, *Ann. of Math.* **57** (1953), 378–391.
29. R. R. LAXTON AND D. J. LEWIS, Forms of degree 7 and 11 on  $p$ -adic fields, Proc. Symp. in Pure Math., VIII, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1965.
30. D. J. LEWIS, Cubic homogeneous polynomials over  $p$ -adic number fields, *Ann. of Math.* **56** (1952), 473–478.
31. D. J. LEWIS, Singular quartic forms, *Duke Math. J.* **21** (1954), 39–44.
32. D. J. LEWIS, Cubic forms over algebraic number fields, *Mathematika* **4** (1957), 97–101.
33. D. J. LEWIS, Cubic congruences, *Mich. Math. J.* **4** (1957), 85–95.
34. M. NAGATA, Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic-closure, *Mem. Univ. Kyoto Ser. A* **30** (1957), 237–241.
35. L. G. PECK, Diophantine equations in algebraic number fields, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 387–402.
36. P. RIBENBOIM, "La Conjecture d'Artin sur les Équations Diophantiennes" Queen's Papers, Queen's University, Kingston, Ontario, 1968.
37. J. P. SERRE, "Corps locaux," Hermann, Paris, 1962.
38. J. P. SERRE, "Cohomologie Galoisienne," Springer-Verlag, Berlin, 1964.
39. J. P. SERRE, "Algèbre locale. Multiplicités," Springer-Verlag, Berlin, 1965.
40. J. P. SERRE, "Cours d'Arithmétique," Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
41. T. A. SPRINGER, Some properties of cubic forms over fields with a discrete valuation, *Koninkl. Nederl. Akad. van Wetens. Ser. A* **58** (1955), 512–516.
42. G. TERJANIAN, Un contre-exemple à une conjecture d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris* **262** (1966), 612.
43. C. C. TSEN, Divisionalgebren über Funktionkörper, *Nachr. Akad. Wiss., Göttingen Math. Phys. Kl. II* (1933), 335–339.
44. E. WARNING, Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **11** (1936), 76–83.
45. A. WEIL, "Foundations of algebraic geometry, Deuxième" édition, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* N° 29, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1962.













